ВИЗУАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

[1]Смирнов В.В., [2]Спиридонов Ф.Ф.

[1]Бийский технологический институт, г. Бийск

[2]Тверской филиал Московского гуманитарно-экономического института, г. Тверь

Рассматриваются некоторые классы дифференциальных уравнений, для которых применение стандартных решающих процедур является проблематичным. В этой связи визуализация корней с помощью средств компьютерной алгебры оказывается весьма эффективным инструментом анализа.

Многие задачи математического моделирования в естествознании, технике, биологии и других отраслях науки сводятся к решению задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$y'(t) = f(t, y) \tag{1}$$

с начальными условиями $y(t_0) = y_0$. При этом существуют обширные классы дифференциальных уравнений, решения которых не выражаются через элементарные функции и их конечные комбинации. Иначе, говорят, что такие уравнения не имеют решения в замкнутой форме. Но, одна из главных теорем о дифференциальных уравнениях утверждает, что при определенных ограничениях, наложенных на уравнение и его начальные условия, гарантируется существование решения, по крайней мере, для некоторого интервала в окрестности начального значения независимой переменной. Когда из условий задачи ясно, что решение в отдельной точке имеется, то можно попытаться найти его с помощью численных методов [1].

Однако здесь имеется проблема, состоящая в том, что численные методы, обычно «не задумываются» над поведением искомых функций и могут выдать результат решения дифференциального уравнения даже тогда, когда числовое значение вряд ли существует или наоборот, могут не найти ряд значений там, где они есть.

В настоящей работе рассматривается возможный выход из такой ситуации – графическая локализация корней. В приведенных примерах используется система компьютерной алгебры Maple, в частности пакеты **plots** и **DEtools** [2]. При этом обращается внимание на задачи, для решения которых набор Maple-команд не является вполне очевидным.

Первое рассматриваемое уравнение

$$y'(t) = t^2 + y^2 \tag{2}$$

относится к типу уравнений, содержащих в решении специальные функции.

Ниже приведена программа Maple, предназначенная для анализа решения уравнения (2).

```
> restart: with(plots):
de:=diff(y(t),t)=t^2+y(t)^2:
p1:=dsolve({de,y(0)=1},y(t));
p2:=dsolve({de,y(0)=1},y(t),type=numeric):
f1:=plot(rhs(p1),t=-3..3,y=-4..4,thickness=4,color=blue):
f2:=odeplot(p2,[t,y(t)],-3..3,thickness=4,color=red, style=point, symbolsize=20):
display([f1,f2]);
```

В первой строке программы осуществляется перезагрузка системы и подключение пакета дополнительной графики. Во второй строке задается исходное дифференциальное уравнение. Третья строка выдает аналитическое решение задачи Коши для уравнения (2) с

начальным условием $y(0)=1$. Это решение содержит комбинацию специальных функций; оно показано на рис. 1. В четвертой строке решается та же задача с использованием, по умолчанию, достаточно надежного численного метода Рунге-Кутта-Фехлберга (RKF45) [1]. В пятой строке задаются параметры графика аналитического решения, а в шестой и седьмой строках – параметры точечного графика численного решения. Последняя строка инициирует совместный вывод обоих графиков, показанный на рис. 2.

$$pl := y(t) = -\frac{t\left(-\frac{\left(\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2-\pi\right)\mathrm{BesselJ}\left(\frac{-3}{4},\frac{t^2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2}+\mathrm{BesselY}\left(\frac{-3}{4},\frac{t^2}{2}\right)\right)}{-\frac{\left(\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2-\pi\right)\mathrm{BesselJ}\left(\frac{1}{4},\frac{t^2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2}+\mathrm{BesselY}\left(\frac{1}{4},\frac{t^2}{2}\right)}$$

Рис.1. Полученное аналитическое решение в виде комбинации специальных функций

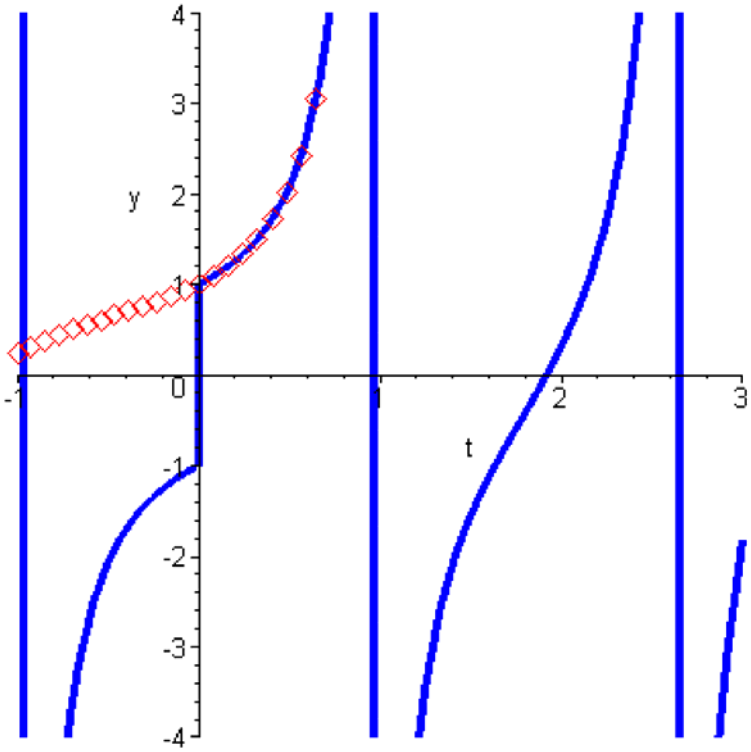

Рис.2. Сравнение аналитического и численного решений уравнения (2)

Сравнивая численное и аналитическое решение, легко заметить, что они согласуются очень хорошо, но лишь на небольшом промежутке изменения независимой переменной $0<t<1$. Однако, имея график аналитического решения, можно подобрать начальное условие таким образом, чтобы оно не изменило исходной задачи, а численный метод выдавал правильные значения в нужном интервале изменения значения независимой переменной. Так, в рассмотренном примере для нахождения значений функции численным

методом на интервале $-1 < t < 0$ начальному условию $y(0) = 1$ следует предпочесть $y(0) = -1$, что, по сути, не меняет исходной задачи.

Теперь рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$y'(t) = \frac{t^2}{1 - y^2} \tag{3}$$

с начальным условием $y(0) = 0$.

По аналогии с (1) задача решается численным и аналитическим методами. Характер этих решений показан на рис. 3.

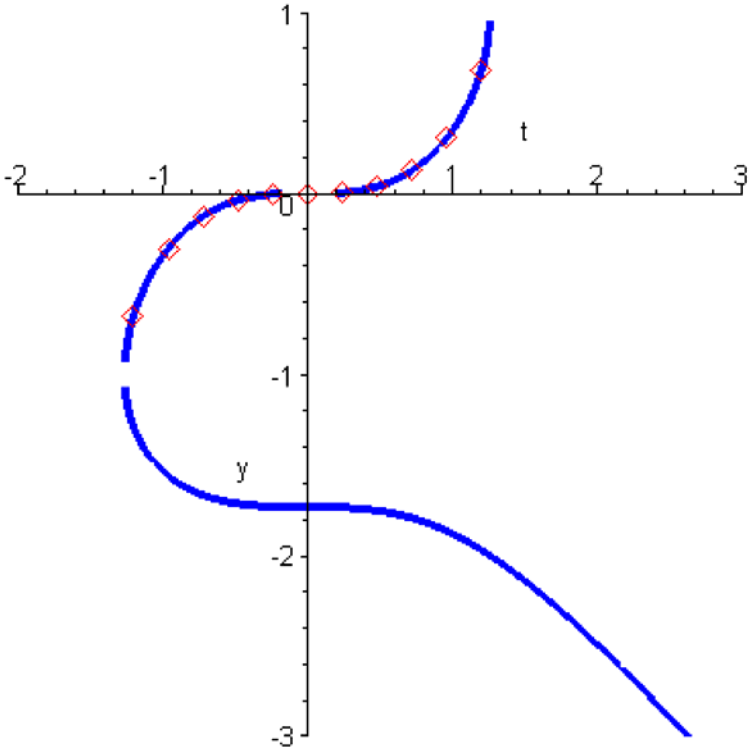

Рис.3. Сравнение аналитического и численного решений уравнения (3)

Вновь стандартное применение численного метода не помогает вполне справиться с ситуацией. Искомая функция является многозначной. В этом случае характер общего решения можно проследить, заметив, что уравнение (3) сепарабельно, т.е. допускает разделение переменных. Перепишем (3) в виде

$$y'(t)\left(1 - y^2\right) = t^2 \tag{4}$$

и составим следующую Maple-программу:

```
> restart:with(plots):
de:=diff(y(t),t)*(1-y(t)^2)=t^2:
sol:=int(lhs(de),t)=int(rhs(de),t);
contourplot(lhs(sol)-rhs(sol),t=-4..4,y=-4..4,
contours=[-4,-3,-2,-1,-1/2,0,1/2,1,2,3,4],thickness=3);
```

Здесь действие первой строки аналогично программе п.1. Вторая строка определяет дифференциальное уравнение (4). В третьей строке осуществляется интегрирование обеих частей, в результате получается неявная зависимость:

$$y - \frac{y^3}{3} = \frac{t^3}{3} + C$$

Четвертая строка позволяет увидеть интегральные кривые при различных значениях постоянной интегрирования. Этот график показан на рис.4.

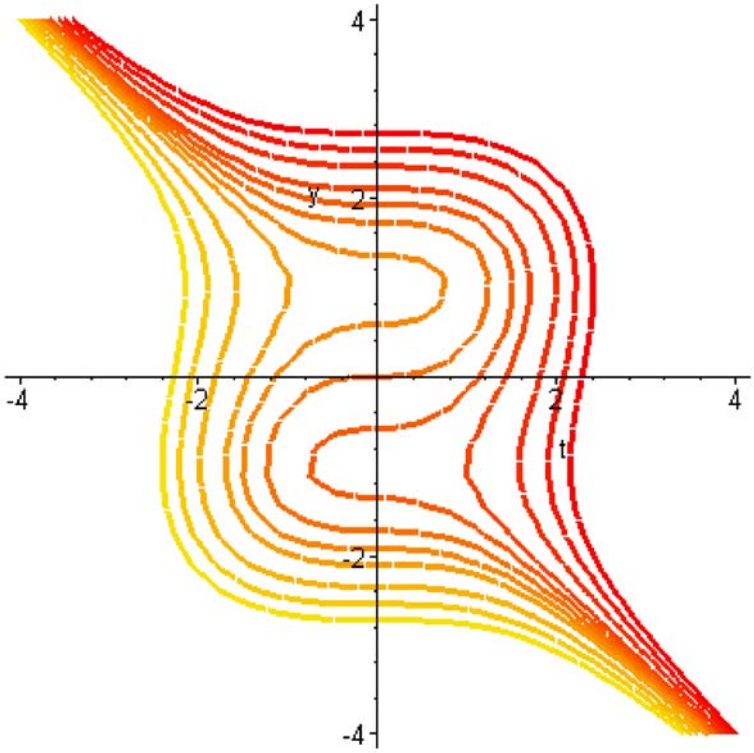

Рис.4. Общее решение уравнения (3)

В двух рассмотренных случаях аналитические решения, хотя и не являлись элементарными, но все же существовали. Далее рассматривается уравнение, для которого не существует аналитического решения, следовательно, оно не может быть найдено средствами Maple. Однако графическая локализация корней по-прежнему возможна. Для этого нужно вспомнить, что задание уравнения в форме (1) определяет тангенсы углов наклона касательных к интегральным кривым в каждой точке (t, y) прямоугольной области

$$R = \{(t, y) : a \le t \le b,\ c \le y \le d\} \qquad (5)$$

Таким образом, определяется так называемое поле направлений, которое можно использовать для приближенного построения самой интегральной кривой, проходящей через заданную точку. Чтобы построить следующую точку интегральной кривой нужно сначала проверить тангенс угла наклона в начальной точке (определить направление), а затем переместиться на некоторый малый шаг по t и подняться или опуститься по вертикали таким образом, чтобы окончательное перемещение имело требуемый тангенс наклона. Следующая точка, принадлежащая кривой решения находится аналогично. Для компьютера выполнение такого построения – чисто техническая задача.

Рассмотрим следующий программный код:

```
> restart:with(plots):with(DEtools):
de:=diff(y(t),t)=sin(t)+sin(y(t)):
R:=t=-4..7,y=-4..7:
curven:={seq(seq([j,k],j=-4..7),k=-4..7)}:
p1:=contourplot(rhs(de),R):
p2:=DEplot(de,y,R,arrows = large,curven,color=sin(t)+sin(y),axes=frame):
display([p1,p2]);
```

В первой строке осуществляется перезагрузка системы и подключение пакетов дополнительной графики решения дифференциальных уравнений. Во второй строке задается дифференциальное уравнение следующего вида:

$$y'(t) = \sin(t) + \sin(y) \tag{6}$$

Третья строка задает границы прямоугольной области (5) в которой будет строиться график. Четвертая строка определяет множество точек, через которые будут проходить интегральные кривые. В пятой строке задаются параметры графика линий уровня для правой части уравнения (6). В шестой и седьмой строках – параметры самого графического решения. Последняя строка позволяет увидеть график, изображенный на рис. 5.

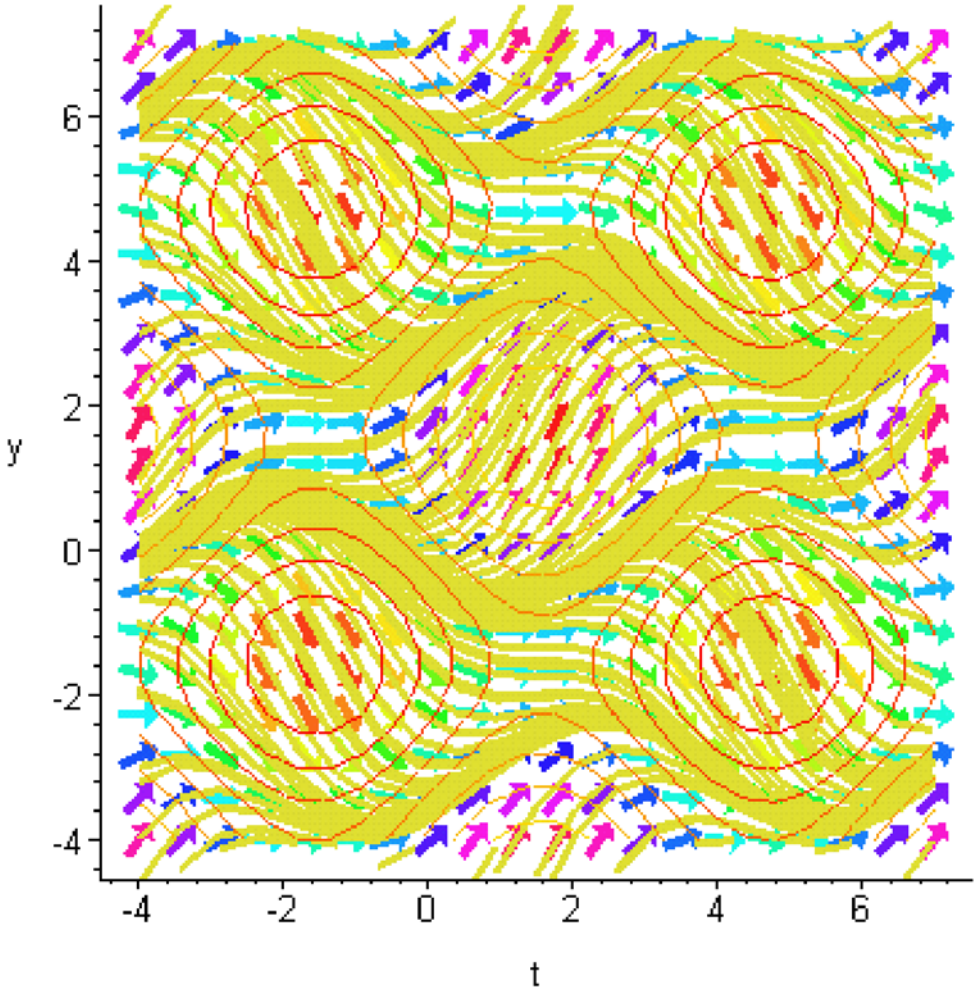

Рис.5. Поле направлений, интегральные кривые и график правой части уравнения (6)

Полученный график очень информативен. Во-первых, в областях где $\sin(t) + \sin(y) > 0$, решения возрастают (см., например, центральную часть графика). Во-вторых, имеются области сгущения и разрежения, которые перемежаются, сохраняя одинаковую ширину. В зонах сгущения у решений наблюдается тенденция к сближению по мере роста t, в противоположных зонах решения как бы разбегаются. Это области, в которых производная $\frac{d}{dy}(\sin(t) + \sin(y))$ отрицательна или положительна соответственно, что зависит только от значения y. В-третьих, можно заметить, что имеются стационарные решения в зонах сжатия, в этих областях $\sin(y)$ возрастает. Такие решения все более сгущаются по мере возрастания аргумента и, по-видимому, стремятся сойтись к периодическому решению. Действительно, такое решение можно увидеть, если продлить график до значения, например,

$t = 12$. Хотя это и не явная синусоида, но очень похожа на нее своей периодичностью. Аналогичные решения расположены также выше и ниже, по вертикали они разделены интервалом 2π. Между периодическими решениями расположены подобные по форме, но нестабильные решения. Если двигаться в обратном направлении по аргументу, то будет видно, что они происходят из стабильных. В-четвертых, тот факт, что для правой части уравнения (6) выполняется неравенство $|\sin(t) + \sin(y)| \le 2$, означает, что тангенс угла наклона решений везде не превышает 2, поэтому решение не может достичь бесконечности за конечное время и любое решение уравнения (6) определено на всей числовой прямой.

Обсуждаемые в данной работе типы обыкновенных дифференциальных уравнений имеют особенности, которые требуют качественного анализа поведения решений. В этой связи рассмотрены способы графической локализации корней средствами системы Maple для уравнений, которые содержат в решении специальные функции, многозначные функции, а также уравнения, не имеющие аналитического решения. Использование подобных средств позволяет начинающему исследователю динамических процессов избежать некоторых ошибок, связанных с математическим моделированием и применением стандартных программных средств и методов для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Литература

1. *Мэтьюз Д.Г., Финк К.Д.* Численные методы. Использование MATLAB. М.: Вильямс, 2001.
2. *Дьяконов В.П.* Maple 8 в математике, физике и образовании. М.: СОЛОН-Пресс, 2003.