МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПЕРФОРИРОВАННОЙ ТРУБЕ

Письменский А.В.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

Предложена двумерная математическая модель движения жидкости в перфорированной трубе с запаянным торцом, основанная на краевой задаче для системы уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска. В среде DELPHI написана программа, реализующая алгоритм численного решения указанной задачи. С использованием пакета MATLAB проведен анализ результатов численных расчетов для трубы с различным расположением и размерами отверстий, а также средними скоростями и коэффициентами вязкости поступающей в нее жидкости.

Введение

В настоящий момент широко распространен метод нефтедобычи, состоящий в выкачивании нефти, содержащейся между пластами твердой породы, по перфорированной трубе, нижний конец которой запаян. Эффективность данного метода во многом зависит от расположения отверстий, проделанных перфоратором. Для определения оптимальных размеров этих отверстий их количества и местоположения необходимо исследование гидродинамических процессов, протекающих внутри такой трубы. Ясно, что проведение экспериментального исследования весьма трудоемко. Более простым и дешевым методом изучения является математическое моделирование и численный эксперимент.

Целью данной работы является построение двумерной математической модели движения жидкости в трубе с расположенными вдоль отверстиями и запаянным торцом, реализация алгоритма численного решения в среде BORLAND DELPHI и анализ результатов численных расчетов с использованием пакета MATLAB.

Постановка и решение задачи

Рассмотрим фрагмент длины $L^{(d)}$ нижней части трубы диаметра $H^{(d)}$ и двумерную модель, описывающую движение жидкости, поступающей под преобладающим внешним (например, пластовым) давлением в боковые отверстия с постоянной скоростью $V_0^{(d)}$, как показано на рис. 1. Основание (нижний торец) трубы запаян, что приводит к поступлению жидкости «вверх» по трубе со скоростью $\mathbf{V}^{(d)}(t^{(d)},x^{(d)},y^{(d)})$, где t – время, x,y – координаты. Индекс (d) означает, что соответствующая величина размерная.

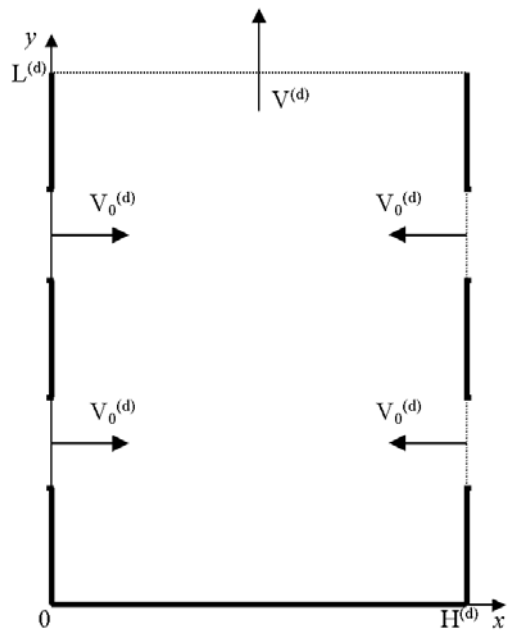

Рис.1. Продольное сечение фрагмента перфорированной трубы с запаянным нижним торцом

Гидродинамические процессы в данных условиях описываются системой уравнений Навье-Стокса [1]. Система приводится к безразмерному виду следующей заменой:

$$X = \frac{x^{(d)}}{H^{(d)}}, \quad Y = \frac{y^{(d)}}{H^{(d)}}, \quad L = \frac{L^{(d)}}{H^{(d)}}, \quad H = \frac{H^{(d)}}{H^{(d)}} \equiv 1, \quad T = \frac{V_{cp}^{(d)} t^{(d)}}{H^{(d)}},$$

$$V_x = \frac{V_x^{(d)}}{V_{cp}^{(d)}}, \quad V_y = \frac{V_y^{(d)}}{V_{cp}^{(d)}}, \quad Re = \frac{V_{cp}^{(d)} H^{(d)}}{\nu^{(d)}},$$

где T и $t^{(d)}$ – безразмерное и размерное время, V_x и V_y – компоненты вектора скорости **V**(T,X,Y), $V_{cp}^{(d)}$ – средняя скорость течения, $\nu^{(d)}$ – коэффициент кинематической вязкости жидкости, *Re* – число Рейнольдса.

Соответствующая краевая задача представляет систему уравнений Навье-Стокса в переменных функций вихря $\xi = \xi(T,X,Y)$ и тока жидкости $\psi = \psi(T,X,Y)$, (которые были введены согласно [2] для исключения из исходной системы функции давления):

$$\frac{\partial \xi}{\partial T} = -V_x \frac{\partial \xi}{\partial X} - V_y \frac{\partial \xi}{\partial Y} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial Y^2} \right),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial T} = \nabla^2 \psi - \xi,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial Y} = V_x, \quad \frac{\partial \psi}{\partial X} = -V_y.$$

При этом ставятся естественные граничные условия. В частности, для скорости движения жидкости на границах стенка/жидкость используется условие «прилипания» **V**={0,0}, на щелевых входах – постоянная скорость **V**(T,0,Y) ={V_0,0}, **V**(T,1,Y) ={-V_0,0}. Значения безразмерной координаты X=0 и X=1 соответствуют левой ($x^{(d)}$=0) и правой ($x^{(d)}$=$H^{(d)}$) стенкам.

Для численного решения поставленной задачи использована стандартная равномерная сетка и дискретное представление функций. Алгоритм решения основан на применении явной разностной схемы и представляет переход от текущего слоя по времени к следующему слою. При этом добавлено краевое условие для функции вихря на границах стенка/жидкость, а именно условие Тома первого порядка [2], которое не имеет физического смысла, но

необходимо для корректного численного решения: независимо от ориентации стенки и от значения ψ на границе

$$\xi_w = \frac{2(\psi_{w+1} - \psi_w)}{\Delta n^2} + O(\Delta n),$$

где Δn – расстояние по нормали к стенке от ближайшей к стенке узловой точки w+1 до ее проекции w на стенку.

Реализация алгоритма

Программа «OilDC», реализующая вышеуказанный алгоритм, написана в среде BORLAND DELPHI. Ее главная экранная форма представвлена на рис. 2.

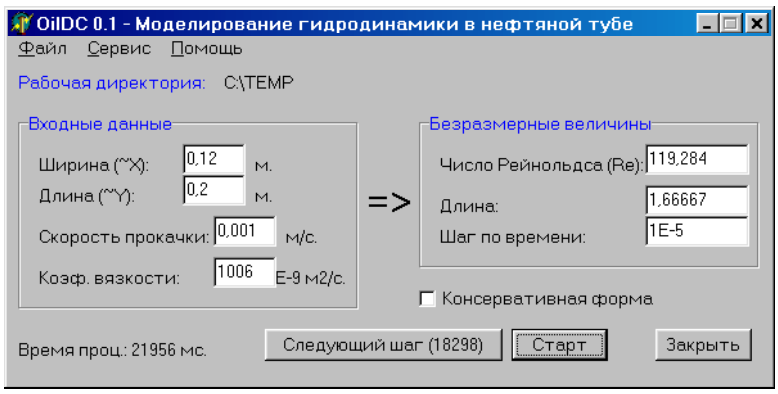

Рис.2. Главная экранная форма программы «OilDC»

Программа предоставляет возможность варьировать условия подачи и вывода раствора, а также геометрические параметры рассматриваемого фрагмента трубы, что позволяет определять оптимальное расположение и размер отверстий для заданных внешних условий. Результатами расчетов являются 4 двумерных массива, соответствующие полям функции вихря ξ, тока жидкости ψ и компонентам V_x, V_y векторного поля скорости. Значения этих массивов по желанию пользователя сохраняются в файлах в формате MATLAB. Визуализация и анализ полученных данных производится с использованием программного пакета MATLAB.

Анализ полученных результатов

Проведен ряд численных расчетов с различными параметрами моделируемой системы: средними скоростями $V_{cp}^{(d)}$, коэффициентами вязкости $\nu^{(d)}$, длинами фрагмента трубы $L^{(d)}$, диаметрами трубы $H^{(d)}$, количеством, расположением и размером отверстий. Результаты некоторых из этих расчетов, выполненных для набора входных параметров {$H^{(d)}$=12см; $L^{(d)}$=30см; $\nu^{(d)}=1.006\cdot10^{-6}$м^2/с; размер отверстий ≈1см} представлены на рис. 3.

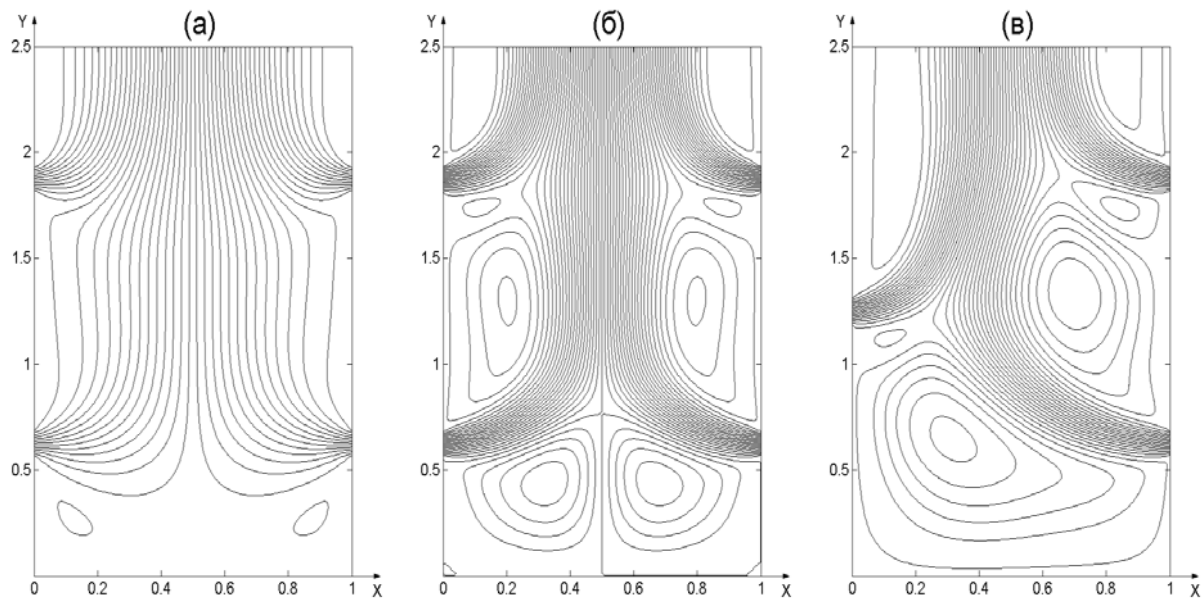

Рис. 3. Линии тока жидкости при ее поступлении (а) из двух пар симметрично расположенных отверстий со скоростью $V_{cp}^{(d)}$ = 0.1 мм/с (Re=12); (б) из двух пар симметрично расположенных отверстий со скоростью $V_{cp}^{(d)}$ = 1 мм/с (Re=120); (в) из одного отверстия на одной стенке и двух отверстий на другой стенке со скоростью $V_{cp}^{(d)}$ = 1 мм/с (Re=120)

Анализ полученных данных показывает, что при условиях, соответствующих представленным на рис. 3а, в трубе возникает ламинарное течение, близкое к ползучему. При условиях, соответствующих представленным на рис. 3б и 3в заметно возникновение множества вихрей, которые могут влиять на коэффициент гидравлического сопротивления в трубе, а следовательно, и на эффективность добычи нефти.

Заключение

Предложена двумерная математическая модель движения жидкости в трубе с расположенными вдоль отверстиями и запаянным торцом, основанная на краевой задаче для системы уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска.

Разработан алгоритм численного решения краевой задачи, соответствующей данной модели. Алгоритм реализован в среде BORLAND DELPHI. Опыт написания и отладки данной программы, а также подобных и более сложных программ, показывает, что среда программирования DELPHI предоставляет достаточно простые и удобные средства реализации алгоритма численного решения задачи, его отладки, создания дружественного пользовательского интерфейса. Программа, написанная на DELPHI, демонстрирует вполне приемлемые скоростные характеристики на компьютерах с процессором Pentium II и объемом памяти 128 MB.

С использованием пакета MATLAB проведен анализ результатов численных расчетов для трубы с различным расположением и размерами отверстий, а также средними скоростями и коэффициентами вязкости поступающей в нее нефти. Пакет программ MATLAB предоставляет широкие возможности по обработке и анализу числовых данных и, в частности, позволяет наглядно представить полученные данные в виде двух- и трехмерных графиков.

Численные эксперименты, проводимые с помощью созданной программы «OilDC», позволяют получить количественную информацию о распределении линий тока и скоростей жидкости при варьируемых условиях подачи и вывода раствора, а также геометрических

параметров рассматриваемого фрагмента трубы. Эти расчеты могут быть использованы для повышения эффективности одного из основных методов нефтедобычи.

Литература

1. *Григин А.П., Давыдов А.Д.* Естественная конвекция в электрохимических системах // Электрохимия. 1998. Т.34. №11. С.1237-1263.
2. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.