ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПЛП-ПОИСКА В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Статников И.Н., Фирсов Г.И.

Институт машиноведения им. А.А.Благонравова РАН

Рассматривается возможность на основе планируемого вычислительного эксперимента на стадии математического моделирования эффективно строить свертки получаемой информации. Это позволяет строить непосредственную функциональную зависимость между параметрами и критериями качества динамической системы. Приведены результаты исследования на математической модели звукоизлучения элементов ткацкого станка; строится математическая модель распространения акустической энергии по конструкции машины; приводятся формулы вычисления коэффициентов для некоторых видов регрессионных зависимостей, даются заранее рассчитанные оценки дисперсий снизу и сверху как для коэффициентов, так и для значений функции регрессии (т.е., прогноз ошибки критерия качества). Такие оценки позволили выработать рекомендации по уменьшению шумов машины.

Проведение математических экспериментов, т.е. математическое моделирование, должно быть целенаправленным и оптимальным (хотя бы в смысле затрат машинного времени, что далеко не всегда является главным). Специфика различных областей научных исследований привела к разработке множества методов и их модификаций планирования экстремальных экспериментов [1].

При исследовании машин и механизмов специфика этой области научного знания может быть обрисована следующим образом. Физические принципы и законы классической механики позволяют в большинстве случаев строить математические модели функционирования современных проектируемых технических систем. Такие модели представляют собой совокупность обыкновенных дифференциальных (линейных или нелинейных) уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных, интегральных, интегро–дифференциальных уравнений и различных функциональных ограничений. Наличие таких (имитационных) моделей и современной вычислительной техники позволяет уже на предварительной стадии исследования изучить особенности функционирования, т.е., динамические свойства проектируемого устройства.

С учетом рассмотренной специфики исследования задач механики машин авторами был предложен метод ПЛП – поиска (планируемого ЛП – поиска) [2,3], позволяющий, с одной стороны, на основе проведения вычислительных экспериментов осуществить квазиравномерный просмотр области исследуемых параметров G ($\overline{\alpha}$), а, с другой стороны, в результате специального планирования этих экспериментов применить количественные оценки влияния варьируемых параметров αj на анализируемые свойства машины (оценки, разработанные в математической статистике).

При использовании имитационного моделирования [1] в задачах анализа и синтеза динамических систем сталкиваются с проблемой получения большого количества информации, а отсюда- и с проблемами обработки и интерпретации получаемых результатов. Один из возможных путей решения указанных проблем - свертывание полученной информации на основе статистической обработки результатов имитационного моделирования. В частности, широко используются зависимости в виде обобщенного. степенного полинома Колмогорова - Габора [2]

$$\hat{\Phi}_k(\bar{\alpha}) = \beta_0 + \sum_1^r \beta_j \alpha_j + \sum_1^r c_j \alpha_j^s + \sum_{i \neq j}^r d_{ij} \alpha_j^s \alpha_i^t, \tag{1}$$

где $\hat{\Phi}_k(\bar{\alpha})$ - значение k-го критерия качества системы ($k = \overline{1,m}$); α - вектор конструктивных параметров системы ($\bar{\alpha} = \alpha_1, ..., \alpha_r$); s и t - числа натурального ряда, большие или равные двум; $j = \overline{1,r};$ β0, βj, cj и dij - коэффициенты, подлежащие оцениванию по результатам экспериментов.

Введем вектор коэффициентов $\bar{b} = (b_1, ..., b_p),$ оцениваемых в выражении (1), где $p = \overline{1, n-1},$ а n в общем случае определяется формулой

$$n = (r^2 + 3r + 2)/2. \tag{2}$$

Из (2) следует, что уже при r >> 3 n >> 10. Очевидно, что такая степенная зависимость, полезная в отдельных случаях, чаще всего неэффективна из-за громоздкости выражения (1) и, следовательно, не поддается оперативной интерпретации. Налицо проблема уменьшения числа членов выражения (1), прямо связанная с уменьшением размерности r пространства варьируемых параметров αj. В методе ПЛП-поиска эта проблема решается на основе построенной процедуры проведения экспериментов и использования дисперсионного анализа [3]. Так что полагаем, что реальное число параметров r' < r.

Стандартным методом при определении неизвестных коэффициентов выражения (1) является метод наименьших квадратов (МНК). Используя процедуру МНК (1), получим относительно bp систему линейных уравнений вида

$$dQ/dbp = 0, \tag{3}$$

где $Q = \sum_{l=1}^N [\hat{\Phi}_{k,l}(\bar{\alpha}) - \Phi_{k,l}^Э(\bar{\alpha})]^2;$ N - количество экспериментов на ЭВМ, $\Phi_{k,l}^Э(\bar{\alpha})$ - экспериментальное значение критерия качества, полученное на ЭВМ в результате расчетов на математической модели исследуемой динамической системы.

Для представления о виде системы уравнений (3) распишем первое уравнение этой системы:

$$Nb_0 + b_1 \sum_1^N \alpha_{1,l} + ... + b_r \sum_1^N \alpha_{r,l} + b_{r+1} \sum_1^N \alpha_{1,l}^s + ... + b_{2r} \sum_1^N \alpha_{r,l}^s +$$
$$+ b_{2r+1} \sum_1^N \alpha_{1,l}^s \alpha_{2,l}^t + ... + b_{n-1} \sum_1^N \alpha_{r-1,l}^s \alpha_{r,l}^t = \sum_1^N \Phi_{k,l}^Э. \tag{4}$$

Уже из уравнения (4) видно, что для нахождения коэффициентов bp необходимо подсчитать различные функции параметров φ(αj), например, $\sum_1^N \alpha_{r,l}^s,\ \sum_1^N \alpha_{r-1}^s \alpha_{r,l}^t.$ Кроме того, необходимо подсчитывать и образующиеся правые части уравнений (3). При произвольном размещении векторов $\bar{\alpha}$ в пространстве варьируемых параметров все указанные функции φ(αj) и правые части обычно подсчитываются ЭВМ и затем используют какую-либо стандартную процедуру решения системы линейных уравнений.

В случае исследования динамической системы на ЭВМ с помощью ПЛП-поиска [2] представляется возможным всякого вида функции φ(αj) подсчитать заранее по формулам, предлагаемым ниже. Это оказывается возможным, так как в ПЛП-поиске все количество экспериментов N проводится на ЭВМ сериями по Mj экспериментов в каждой, т.е. N = MjT, где T - количество серий экспериментов, и используются псевдослучайные числа qil ЛПτ-последовательности [6].

Рассмотрим подробнее вывод формулы $\varphi(\alpha_j) = \sum_{1}^{M_j} \alpha_{j,l}.$ Запишем выражение для вычисления αj,l::

αj,l = αj* + qj,l (αj** - αj*), (5)

где $0 < q_{j,l} < 1,\ \alpha_{j,l} \in (\alpha_{j,*}, \alpha_{j,**})$ и $\Delta\alpha_j = \alpha_{j**} - \alpha_{j*}.$ В ПЛП- поиске Mj = 22ν(ν=2,3,...,), а сам индекс l пробегает значения от 2ν до 2ν+1-1. С учетом сказанного выражение для φ(αj) примет вид

$$\varphi(\alpha_j) = \sum_{2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} \alpha_{j,l} = \sum_{2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} (\alpha_{j0} + q_{j,l}\Delta\alpha_j) = 2^\nu \alpha_{j*} + \Delta\alpha_j \sum_{2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} q_{j,l}. \tag{6}$$

На отрезке [2ν; 2ν+1] число qj,l представляется в виде дроби

$$q_{j,l} = \frac{2(l-2^\nu)+1}{2^{\nu+1}}. \tag{7}$$

С учетом (7) выражение (6) принимает вид

$$\varphi(\alpha_j) = 2^\nu \alpha_{j,*} + \Delta\alpha_j \sum_{l=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} \frac{2(l-2^\nu)+1}{2^{\nu+1}} =$$

$$2^\nu \alpha_{j,*} + \frac{\Delta\alpha_j}{2^{\nu+1}}[1+3+...+(2^{\nu+1}-1)] = \frac{M_j}{2}(\alpha_{j*} + \alpha_{j,**}). \tag{8}$$

Аналогично (8), используя формулы (5) и (7), можно найти выражения для суммы $\sum_{1}^{N} \alpha_{j,l}^s$ при любом $s \geq 1.$ В таблице приведены формулы для этих сумм при наиболее употребительных значениях s. Для того чтобы получить значения φ(αj) по всем N экспериментам на ЭВМ, нужно значения, вычисленные по табличным формулам, умножить на число серий T.

Формулы для расчета сумм φ(αj)

φ(αj)	Формула
$\sum_{M_j}^{2M_j-1} \alpha_{j,l}.$	$\frac{\alpha_{j,*}+\alpha_{j,**}}{2} M_j$
$\sum_{M_j}^{2M_j-1} \alpha_{j,l}^2.$	$M_j \alpha_{j,*}\alpha_{j,**} + (\Delta\alpha_j)^2(4M_j^2-1)/12M_j$
$\sum_{M_j}^{2M_j-1} \alpha_{j,l}^3.$	$M_j \alpha_{j*}^3 + \frac{\Delta\alpha_j}{24M_j}[6M_j^2(3\alpha_{j*}^2 + 2\alpha_{j*}\alpha_{j**} + \alpha_{j**}^2) - 3\Delta\alpha_{j*} + \alpha_{j**})]$
$\sum_{M_j}^{2M_j-1} \alpha_{j,l}^4.$	$M_j \alpha_{j*}^3(2\alpha_{j**} - \alpha_{j*}) + \frac{(\Delta\alpha_j)^2}{240M_j^2}[48M_j^4(\alpha_{j**}^2 + 3\alpha_{j*}\alpha_{j**} + 6\alpha_{j*}^2) - 40M_j^2(\alpha_{j**}^2 + \alpha_{j*}\alpha_{j**} + \alpha_{j*}^2) + 7(\Delta\alpha_j)^2]$

Иначе дело обстоит с суммами вида $\sum_{1}^{N} \alpha_{j,l}^s \alpha_{i,l}^t.$ Точных выражений для подсчета таких сумм нельзя найти. Однако при реализации матрицы планируемых экспериментов сериями с большим числом экспериментов в каждой (M_j = 16, 32,...) оказалось, что эти суммы можно вычислять по приближенным формулам с достаточной степенью точности:

$$\sum_{\substack{j\neq i\\ l=M_j}}^{2M_j-1} \alpha_{j,l}^s \alpha_{i,l}^t \approx M_j E(\alpha_{j,l}^s \alpha_{i,l}^t), \tag{9}$$

где $E(\alpha_{j,l}^s \alpha_{i,l}^t)$ - математическое ожидание величины $y_l = \alpha_{j,l}^s \alpha_{i,l}^t$. Учитывая, что $\alpha_{j,l}$ и $\alpha_{i,l}$ - независимые псевдослучайные равномерно распределенные числа, вычисляемые по формуле (5), для $E(\alpha_{j,l}^s \alpha_{i,l}^t)$ получаем следующее выражение:

$$E(\alpha_{j,l}^s \alpha_{i,l}^t) = E(\alpha_{j,l}^s) E(\alpha_{i,l}^t) = \frac{(\alpha_{j**}^{s+1} - \alpha_{j*}^{s+1})(\alpha_{i**}^{t+1} - \alpha_{i*}^{t+1})}{(s+1)(t+1)\Delta\alpha_j \Delta\alpha_i}. \tag{10}$$

При подсчете сумм Σy_i, по всем N экспериментам формула (9) приобретает следующий вид:

$$\sum_{1}^{T} \Big(\sum_{M_j}^{2M_j-1} \alpha_{j,l}^s \alpha_{i,l}^t \Big) \approx M_j T E(\alpha_{j,l}^s \alpha_{i,l}^t). \tag{11}$$

Погрешность вычислений по формуле (11) оценим следующим образом:

$$\delta = \left| 1 - [\sum_{1}^{T} (\sum_{M_j}^{2M_j-1} (\alpha_{j,l}^s \alpha_{i,l}^t))] / M_j T E(\alpha_{j,l}^s \alpha_{i,l}^t) \right|. \tag{12}$$

Очевидно, что $E(\delta) = 0$. Вычислим дисперсию $\sigma^2(\delta)$:

$$\sigma^2(\delta) = \sigma^2 [\sum_{1}^{T} [\sum_{M_j}^{2M_j-1} \alpha_{j,l}^s \alpha_{i,l}^t]] / [M_j^2 T^2 E^2 (\alpha_{j,l}^s \alpha_{i,l}^t)]. \tag{13}$$

Для внутренней суммы числителя в формуле (13) можно записать

$$\sigma^2 (\sum_{M_j}^{2M_j-1} \alpha_{j,l}^2 \alpha_{i,l}^2) = \frac{(\alpha_{j**}^{2s+1} - \alpha_{j*}^{2s+1})(\alpha_{i**}^{2t+1} - \alpha_{i*}^{2t+1})}{(2s+1)(2t+1)\Delta\alpha_j \Delta\alpha_i} - \frac{(\alpha_{j**}^{s+1} - \alpha_{j*}^{s+1})^2 (\alpha_{i**}^{t+1} - \alpha_{i*}^{t+1})^2}{(s+1)^2 (t+1)^2 (\Delta\alpha_j \Delta\alpha_i)^2}. \tag{14}$$

Подстановка (14) в (13) дает выражение для дисперсии $\sigma^2(\delta)$:

$$\sigma^2(\delta) = [\frac{(s+1)^2 (t+1)^2 (\alpha_{j**}^{2s+1} - \alpha_{j*}^{2s+1})(\alpha_{i**}^{2t+1} - \alpha_{i*}^{2t+1}) \Delta\alpha_j \Delta\alpha_i}{(2s+1)(2t+1)(\alpha_{j**}^{s+1} - \alpha_{j*}^{s+1})^2 (\alpha_{i**}^{t+1} - \alpha_{i*}^{t+1})^2} - 1] \frac{1}{M_j T}. \tag{15}$$

Как видно из формулы (15), величина $\sigma^2(\delta)$ не зависит от размерности r пространства варьируемых параметров α_j, симметрична относительно показателей s и t. Из (15) также следует, что дисперсия ошибки δ зависит от величин $\Delta\alpha_j$ и $\Delta\alpha_i$ и при $M_j T \to \infty$ стремится к нулю. Однако из формул (10) и (12) видно, что если $|\alpha_{j*}| = |\alpha_{j**}|$ или $|\alpha_{i*}| = |\alpha_{i**}|$ и при этом хотя бы один из показателей степени s или t есть нечетное число, то формулой (11) нельзя пользоваться, так как в соответствии с формулой (15) $\sigma^2(\delta) \to \infty$.

Анализ функциональных зависимостей $\sigma(\delta)$ от T при различных M_j, проведенных для случаев $s = t = 1$ и $s = 2$ и $t = 1$, показывает, что $\sigma(\delta)$ значительно уменьшается после 5 - 7 серий, в дальнейшем с увеличением T несущественно меняется. Для значительного уменьшения дисперсии ошибки δ нужно увеличивать число экспериментов M_j в серии.

Рассмотрим конкретный пример применения вышеприведенной процедуры для исследования чувствительности критериев к изменениям параметров в задаче многокритериального проектирования ткацкого станка по акустическим критериям. Любая задача проектирования современного технического устройства — многокритериальная, даже если и установлена иерархия критериев. И, разумеется, при решении такой задачи необходимо использовать весь комплекс существующих на сегодня идей и методов теории принятия решений [7].

Однако хотелось бы подчеркнуть, что при использовании методологии принятия решений в задачах проектирования технических устройств следует различать две группы критериев

качества. К первой группе относят все те критерии, которые характеризуют (оценивают) непосредственно качество выполнения требуемой работы и соответствующие технические характеристики (точность работы, быстродействие, виброактивность, габариты и т. д.). Ко второй группе относят все те критерии, которые характеризуют технико-экономические свойства проектируемого устройства (себестоимость, трудоемкость, надежность, экологическая приспособляемость *к* окружающей среде и т. д.).

Такое разделение всевозможных критериев качества на две группы представляется необходимым по следующим двум соображениям. Во-первых, несмотря на функциональную, хотя и не всегда явную, зависимость второй группы критериев от первой, все же можно считать эту группу критериев достаточно автономной в том смысле, что логически вторая группа критериев должна рассматриваться после анализа первой группы критериев. Действительно, анализ по первой группе критериев допускает теоретически неограниченное множество допустимых вариантов проектируемого устройства, в то время как вторая группа резко сужает это множество вариантов, иногда оставляя единственный вариант. Во-вторых, на основании такого деления всех критериев на две группы представляется возможным утверждать, что вся мощь современных методов теории принятия решений (системный подход, диалог ЭВМ с лицом, принимающим решение (ЛПР)) более всего нужна именно при анализе критериев второй группы, поскольку в этом случае всегда останется определенное множество неучтенных и плохо формализуемые факторов различной природы (экономической, социологической и т. д.). В то же время анализ по первой группе критериев предоставляет достаточно большие возможности в формализации самого процесса выбора множества допустимых вариантов, а значит и полной автоматизации всего процесса с помощью ЭВМ. Уязвимым местом в таком процессе является во множестве случаев отсутствие функциональной зависимости критериев первой группы от параметров проектируемого устройства. Однако на основе проведения имитационных экспериментов на ЭВМ этот пробел можно устранить в каждом конкретном случае путем построения аппроксимационных моделей критериев.

В работе [8] на основе использования метода планируемого эксперимента ПЛП-поиска в пространстве варьируемых параметров η_j $(1,...,6)$ была выделена численным путем область $G(\overline{\eta})$, где с вероятностью $P \geq 95$ % можно отыскать варианты виброзащитного покрытия несущей системы ткацкого станка, хорошие с естественной точки зрения. А эта точка зрения состоит в том, что хорошим полагается вариант, у которого нормированные критерии качества λ_k (κ = 1,2), оценивающие уровень шума ($0 \leq \lambda_1 \leq 1$) и расход виброизолирующего материала ($0 \leq \lambda_2 \leq 1$), были бы близки к идеальному, хотя и нереальному варианту покрытия с $\lambda_1^* = \lambda_2^* = 1$. В качестве критериев выделения области $G(\overline{\eta})$ в пространстве варьируемых параметров использовались функция полезности

$$\Phi_3(\overline{\eta}) = \sum_1^2 c_k \lambda_k$$

и функция

$$\Phi_n(\overline{\eta}) = \left| c_1\lambda_1 - c_2\lambda_2 \right| / \sqrt{c_1^2 + c_2^2},$$

минимизирующая численное неравенство в значениях λ_1 и λ_2,. Здесь c_1 и c_2 - весовые коэффициенты критериев λ_1 и λ_2 удовлетворяющие условию $\sum_1^2 c_k = 1$. В дальнейшем для упрощения анализа и расчетов принято $c_1 = c_2 = 0{,}5$.

О том, что область $G(\overline{\eta})$ действительно содержит варианты, удовлетворяющие определению хорошего варианта, свидетельствуют результаты численного эксперимента, проведенного в этой области. Было просчитано на ЭВМ 190 вариантов, у которых

максимальные и минимальные значения λ_1 и λ_2 определили следующие интервалы изменения:

$$0{,}690 \le \lambda_1 \le 0{,}952 \text{ и } 0{,}539 \le \lambda_2 \le 0{,}835. \qquad (16)$$

Такой итоговый результат по работе [8] обладает тем недостатком, что при решении конкретной задачи проектирования виброзащитного устройства знание границ области $G(\overline{\eta})$ само по себе еще мало приносит пользы. Ведь для каждого нового варианта из этой области нужно заново проводить все расчеты, и при этом все остается нерешенным вопрос о чувствительности λ_1 и λ_2 к вариациям коэффициентов демпфирования η_j.

Поэтому ниже решается задача восстановления непосредственной функциональной связи между критериями λ_1 и λ_2 и параметрами η_j; в выделенной области $G(\overline{\eta})$. Успех в построении такой зависимости связан с глубиной физических представлений о моделируемом явлении и удачным выбором ее вида, полнотой экспериментальных данных. Прежде чем перейти к описанию построения таких зависимостей, отнормируем параметры η_j, границы изменения которых образуют область $G(\overline{\eta})$:

$$\begin{gathered} 0{,}010 \le \eta_1 \le 0{,}055;\ 0{,}010 \le \eta_2 \le 0{,}060;\ 0{,}010 \le \eta_3 \le 0{,}156; \\ 0{,}010 \le \eta_4 \le 0{,}105;\ 0{,}015 \le \eta_5 \le 0{,}156;\ 0{,}024 \le \eta_6 \le 0{,}156. \end{gathered} \qquad (17)$$

Нормированные значения параметров η_{nj} вычисляем по формуле

$$\eta_{nj} = (\eta_j - \eta_j^*)/(\eta_j^{**} - \eta_j^*),$$

а область $G(\overline{\eta})$ трансформируется при этом в единичный шестимерный гиперкуб K^6 с ребром [0; 1].

Построение полиноминальных зависимостей $\lambda_1(\overline{\eta}_n)$ и $\lambda_2(\overline{\eta}_n)$ связано с использованием методов множественной регрессии [9]. Однако такие зависимости часто практически малоценны хотя бы из-за большого числа параметров и их сочетаний, входящих в эти зависимости.

В данном случае был использован другой путь. Известно, что произведение $V = \Pi\eta_{nj}$ косвенно характеризует расход виброизолирующего материала. Известно также, что рост величины V приводит *к* увеличению λ_1 и уменьшению λ_2,. Поэтому для построения были выбраны следующие виды зависимостей:

$$\tilde{\lambda}_{1i} = a\lg(V_i + b) + c \qquad (18)$$

и

$$\tilde{\lambda}_{2i} = d - e\lg(V_i + f). \qquad (19)$$

Минимизируя выражения $(\lambda_{ei,2} - \tilde{\lambda}_{2i})^2$ и $(\lambda_{ei,1} - \tilde{\lambda}_{1i})^2$ с заданной точностью δ для каждого $i = \overline{1,80}$, находят свой набор параметров (*a*; *b; c*) и (*d*; *e; f*), и затем по 80 реализациям значения a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i усредняются. Здесь $\lambda_{ei,1}$ и $\lambda_{ei,2}$ - значения критериев λ_1 и λ_2, полученные в экспериментах на ЭВМ. В результате получены следующие выражения:

$$\begin{gathered} \tilde{\lambda}_1 = 0{,}0525\lg(V + 2\cdot 10^{-6}) + 0{,}9852, \\ \tilde{\lambda}_2 = 0{,}4555 - 0{,}0955\lg(V + 2\cdot 10^{-6}). \end{gathered} \qquad (20)$$

Полученные аппроксимационные зависимости (20) проверяем на значимость прогнозирующих свойств (адекватность) в области K^6. Подсчитав средние значения $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2$ и дисперсии σ_{1e}^2 и σ_{2e}^2 по численным экспериментам, получим: $\overline{\lambda}_1 = 0{,}8514$, $\overline{\lambda}_2 = 0{,}7106$, $\sigma_{1e} = 0{,}0521$, $\sigma_{2e} = 0{,}0796$. По этим же данным, определяя доверительные интервалы в $\pm 3\sigma$ для λ_1 и λ_2, получим:

$$0{,}695 \le \lambda_1 \le 1 \text{ и } 0{,}472 \le \lambda_2 \le 0, \qquad (21)$$

Неравенства (16) и (21) хорошо согласуются между собой. Значения дисперсий прогнозируемых величин $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_2$ вычисляются по формулам

$$\sigma_{1T}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{80}(\lambda_{1i} - \tilde{\lambda}_{1i})^2}{N-n-1}, \quad \sigma_{2T}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{80}(\lambda_{2i} - \tilde{\lambda}_{2i})^2}{N-n-1},$$

где n - число коэффициентов, определяемых в каждой из формул (18) и (19). По расчетам получили σ_{1T} = 0,0262 и σ_{2T} = 0,0675. Пользуясь критерием Фишера [10], проверим значимость уравнений (20) $F_1 = \sigma_{1e}^2 / \sigma_{1T}^2 = 3,95$ и $F_2 = \sigma_{2e}^2 / \sigma_{2T}^2 = 1,39$. Эти значения критерия Фишера при степенях свободы $f_1 = N - 1 = 79$ и $f_2 = N - n - 1 = 76$ и уровне значимости $p = 0,05$ больше соответствующего теоретического значения F_T = 1,34. Такой результат ($F_1 > F_T$ и $F_2 > F_T$) свидетельствует о том, что с вероятностью $P \geq 95$ % прогнозирующие свойства уравнений для $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_2$ достаточно надежны.

Какую же полезную информацию непосредственно для проектировщика дают зависимости (20)? Прежде всего, если вариант покрытия оценивается с помощью какой-либо функции полезности, например $\Phi_3(\overline{\eta}_n)$, аналогичной функции $\Phi_3(\overline{\eta})$, то представляется возможным прогнозировать величину $\Phi_3(\overline{\eta}_n)$ при конкретных значениях η_{nj}, зная заранее об абсолютной величине расхождения в значениях $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_2$. Если $\Phi_4(\overline{\eta}_n) = \varepsilon$, то $\Phi_3(\overline{\eta}_n)$ зависит от ε следующим образом:

$$\Phi_3(\overline{\eta}_n) = 0,7204 + 0,2054\varepsilon, \tag{22}$$

где $|\varepsilon| \leq m$.

Из зависимости (22) следует, что при ε = ±20% разница между максимальным и минимальным значениями $\Phi_3(\overline{\eta}_n)$ равна всего лишь 0,08. При этом каждой паре значений $\Phi_3(\overline{\eta}_n)$ и $\Phi_4(\overline{\eta}_n)$ соответствует конкретное значение V. Важно, что это значение V может быть достигнуто любой комбинацией значений η_{nj}, а значит и η_j. Важно и то, что значения $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_2$ малочувствительны к вариациям V. Действительно, на основе (20) функции чувствительности S_1 и S_2, по V равны:

$$S_1 = \frac{d\tilde{\lambda}_1}{dV} = \frac{0,0525V}{V + 2\square 10^{-6}} \text{ и } S_2 = \frac{d\tilde{\lambda}_2}{dV} = -\frac{0,0955V}{V + 2\square 10^{-6}}.$$

Анализ функций S_1 и S_2 показывает, что, начиная с некоторого значения $V \geq 0,0001$, оба критерия становятся малочувствительными к изменениям значений этого параметра вплоть до его максимального значения $V_{max} = 1$.

Существенные изменения чувствительностей S_1 и S_2 в зоне малых значений V легко интерпретируются физически. Дело в том, что минимальным значениям V будет соответствовать минимальное значение хотя бы одного из η_{nj}, т. е. хотя бы один из параметров η_j примет свое нижнее граничное значение из области (17), и будет иметь место тенденция к уменьшению $\tilde{\lambda}_1$ и увеличению $\tilde{\lambda}_2$.

Функции (20) позволяют ответить и на такой вопрос: а как будут себя вести функции $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_2$ при вариации только одного из параметров η_j при фиксированных значениях других параметров. Ответ и в этом случае может быть получен в общем виде, поскольку все функции чувствительностей $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_2$ по любому из параметров η_{n1} будут иметь одно и то же выражение функциональной зависимости. Продифференцируем (20) по η_{n1}, а произведение остальных пяти параметров η_{nj} обозначим через V_1. Тогда

$$S_3 = \frac{d\tilde{\lambda}_1}{d\eta_{n1}} = \frac{0,0525\eta_{n1}V_1}{\eta_{n1}V_1 + 2\square 10^{-6}} \text{ и } S_4 = \frac{d\tilde{\lambda}_2}{d\eta_{n1}} = -\frac{0,0955\eta_{n1}V_1}{\eta_{n1}V_1 + 2\square 10^{-6}}.$$

Анализ функций S_3 и S_4, приводит к выводу, что существуют минимальные и максимальные значения V_1, ниже и выше которых чувствительность критериев $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_2$ по параметру η_{n1} остается постоянной или равной нулю при $V_1 = 0$. И лишь в интервале между минимальными и максимальными значениями V_1 чувствительности S_3 и S_4 по η_{n1} заметно меняются и, следовательно, можно существенно менять значения $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_2$.

На основании результатов данной работы и [2] сделаем следующие выводы. Во-первых, на основе применения метода ПЛП-поиска при проведении на ЭВМ имитационных экспериментов удалось выделить область $G(\overline{\eta})$, которая является генератором таких вариантов виброзащитного покрытия ткацкого станка, у которых с высокой степенью вероятности нормированные критерии качества λ_1 и λ_2 превышают значения 0,5. Во-вторых, на основе выделения такой области и понимания физических процессов удалось построить математические модели, связывающие достаточно надежно значения критериев со значениями варьируемых параметров. В-третьих, на основе построенных математических моделей критериев λ_1 и λ_2 строятся функции чувствительностей критериев по варьируемым параметрам; тем самым создаются объективные возможности предварительного выбора компромиссного варианта покрытия по критериям первой λ_1 и второй λ_2 групп. При этом необходимо отметить, что полученные аппроксимационные зависимости достаточно хорошо согласовывались с аппроксимируемыми математическими моделями систем. В то же время эти зависимости оказались компактными, легко интерпретируемыми и информативными.

Литература.

1. *Налимов В.В., Голикова Т.И.* Логические основания планирования эксперимента. М. Металлургия. 1976.
2. *Статников И.Н.* О структурировании пространства исследуемых параметров в задачах проектирования машин и механизмов // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2000. № 5. С.11–16.
3. *Статников И.Н., Фирсов Г.И.* ПЛП-поиск – эвристический метод решения прикладных задач оптимизации // Практика применения научного программного обеспечения в образовании и научных исследованиях. СПб. 2003. С.54–67.
4. *Шеннон Р.* Имитационное моделирование системы - искусство и наука. М. Мир. 1978.
5. *Ивахненко А. Г.* Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами. Киев. Техника. 1975.
6. *Соболь И. М.* Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. М. Наука. 1969.
7. Многокритериальные задачи принятия решений. М. Машиностроение. 1978.
8. *Поболь О. И., Статников И. И., Фирсов Г. И., Чернявский И. Т.* О решении двухкритериальной задачи оптимального проектирования системы вибропоглощения ткацкого станка // Методы решения задач машиноведения на вычислительных машинах. М. Наука. 1979. С.62-68.
9. *Вознесенский В. А., Ковальчук А. Ф.* Принятие решений по статистическим моделям. М. Статистика. 1978.
10. *Шеффе Г.* Дисперсионный анализ. М. Физматгиз. 1963.