ОБТЕКАНИЕ МЯГКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ОТРЫВОМ СТРУЙ В КАНАЛЕ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ

Хакимов А.Г.

Институт механики Уфимского научного центра РАН, г.Уфа,

Рассматривается задача о струйном обтекании мягкой цилиндрической оболочки по схеме Кирхгофа плоским потоком идеальной несжимаемой жидкости в канале с параллельными стенками. Dugan J.P.[4] построил решение задачи струйного обтекания паруса безграничным потоком. Обтекание дуги, состоящей из недеформируемого прямоугольного участка и гибкого ограждения, в канале с уступом исследуется Киселевым О.М. и Федяевым В.Л [2]. В отличие от перечисленных работ здесь рассматривается задача струйного обтекания гладкой замкнутой мягкой оболочки.

Исследуется стационарное струйное обтекание по схеме Кирхгофа мягкой цилиндрической оболочки плоским потоком идеальной невесомой несжимаемой жидкости плотностью ρ в канале с параллельными стенками [3]. Абсолютно гибкая нерастяжимая мягкая оболочка закреплена по сечениям B и E (рис.1а).

Требуется определить форму оболочки, поле скоростей течения жидкости, сопротивление оболочки, если заданы статическое давление в оболочке P_1, в следе P_0, полное давление в потоке P^*.

Для решения задачи применяются методы теории функций комплексного переменного. Областью изменения параметрического переменного $u = \xi + i\eta$ принята верхняя полуплоскость. Соответствие границ течения на физической и вспомогательной плоскостях z и u дается рис. 1.

Комплексная скорость на вспомогательной плоскости записывается [1]

$$\frac{dW}{dz} = N\frac{u}{u^2 - a^2},$$

где

$$N = \frac{2q}{\pi},\ a^2 = \frac{e^{\frac{\pi\varphi_c}{q}}}{e^{\frac{\pi\varphi_c}{q}} - 1}, \quad q = H\,V_\infty.$$

Здесь φ_c - потенциал скорости в точке C (комплексный потенциал W принят равным нулю в точке разветвления потока B), H - половина высоты канала, V_∞ - скорость жидкости на бесконечности.

Введем в рассмотрение функцию

$$\omega = \ln\frac{dW}{V_0 dz} = \ln\frac{V}{V_0} - i\theta,$$

где V_0 - скорость жидкости на поверхности струй, θ угол между вектором скорости V и осью x.

На линиях ВАД, В'А'Д' $\theta(\xi) = 0$, поэтому $\omega(u)$ находится по формуле Шварца

$$\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-1}^{1}\frac{-\theta(\xi)d\xi}{\xi - u} \tag{1}$$

Комплексно-сопряженная скорость находится по формуле

$$\frac{dW}{V_0 dz} = e^{\omega(u)}. \tag{2}$$

Форма деформированной оболочки определяется из соотношения

$$\frac{dz}{du} = \frac{2q}{\pi V_0} \cdot \frac{u}{u^2 - a^2} e^{-\omega(u)}.$$

Уравнение Лапласа для участка ВСЕ мягкой цилиндрической оболочки записывается

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{P_1 - P^*}{T} + \frac{\rho V^2}{2T}, \tag{3}$$

где s - длина дуги линии поперечного сечения оболочки, отсчитывается по потоку.

Элемент длины дуги на отрезке [-1,1] определяется

$$ds = \frac{2q}{\pi V} \cdot \frac{\xi}{\xi^2 - a^2} d\xi. \tag{4}$$

Дифференциальное уравнение (3) с учетом выражения запишется (4)

$$\frac{d\theta}{d\xi} = f\left(\frac{\alpha V_0}{V} + \frac{\delta V}{V_0}\right), \tag{5}$$

где

$$\alpha = \frac{2q}{\pi V_0} \cdot \frac{P_1 - P^*}{T},\ \delta = \frac{\rho q V_0}{\pi T},\ f = \frac{\xi}{\xi^2 - a^2}, \tag{6}$$

T - усиление натяжения в оболочке.

Функция $\theta(\xi)$ четная, т.е. $\theta(\xi) = \theta(-\xi)$ и при $\xi = 1$ $\theta = -\pi\nu/2$, поэтому $\theta(\xi)$ представима в виде ряда

$$\theta(\xi) = -\frac{\pi\nu}{2} - \left(1 - \xi^2\right)^{1-\frac{\nu}{2}} \sum_{n=0}^{N} A_{2n} \xi^{2n} \tag{7}$$

Интегрируя (1) с учетом выражения (7), получим

$$\omega(u) = \frac{\nu}{2} \ln \frac{u-1}{u+1} + i\left(1 - u^2\right)^{1-\frac{\nu}{2}} \sum_{n=0}^{N} A_{2n} u^{2n} - \sum_{n=0}^{N} d_{2n+1} u^{2n+1},\ |u| < 1, \tag{8}$$

$$\omega(u) = \frac{\nu}{2} \ln \frac{u-1}{u+1} - \sum_{n=0}^{N} d_{2n+1} u^{-(2n+1)},\ |u| > 1,$$

где

$$d_{2n+1} = -\frac{2}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{N-n} A_{2(k+n)} \sum_{m=k}^{2N+k+1} \frac{M_{m-k}}{2m-1} + \sum_{k=0}^{n} A_{2k}\left(\sum_{m=1}^{2N+k-n+1} \frac{M_{m+n-k}}{2m-1} - \sum_{m=1}^{n-k+1} \frac{M_{n-k-m+1}}{2m-1}\right)\right),$$

$$d_{2n+1} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{N-n} A_{2k} \sum_{m=k+n+1}^{2N+k+n+2} \frac{M_{m-k-n-1}}{2m-1},\quad M = 1,\quad M_m = \frac{(-1)^m}{m!} \prod_{i=1}^{m}\left(2 - \frac{\nu}{2} - i\right).$$

Скорость на границе оболочки находится

$$\frac{V}{V_0} = \left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{\frac{\nu}{2}} \exp\left(-\sum_{n=0}^{N} d_{2n+1} \xi^{2n+1}\right).$$

Функция $d\theta/d\xi$ при $\xi = \pm 1$ имеет особенность, поэтому дифференциальное уравнение (5) умножим на $(1-\xi^2)^{\nu/2}$

$$\frac{d\theta}{d\xi}\left(1 - \xi^2\right)^{\frac{\nu}{2}} = \alpha G(\xi) + \delta Q(\xi), \tag{9}$$

где

$$\frac{d\theta}{d\xi}\left(1 - \xi^2\right)^{\frac{\nu}{2}} = \sum_{n=0}^{N}\left[\left(2 - \nu + 2n\right) A_{2n} - 2(n+1) A_{2n+2}\right]\xi^{2n+1},$$

$$G(\xi) = \frac{\xi\left(1+\xi\right)^{\nu}}{\xi^2 - a^2} \exp \sum_{n=0}^{N} d_{2n+1} \xi^{2n+1},$$

$$Q(\xi)=\frac{\xi(1-\xi)^{\nu}}{\xi^2-a^2}\exp\sum_{n=0}^{N}-d_{2n+1}\xi^{2n+1} \tag{10}$$

Функции *G(ξ) и Q(ξ)* нечетные, поэтому представимы в виде рядов

$$G(\xi)=\sum_{n=0}^{N}G_{2n+1}\xi^{2n+1},\ Q(\xi)=\frac{\xi(1-\xi)^{\nu}}{\xi^2-a^2}\exp\sum_{n=0}^{N}-d_{2n+1}\xi^{2n+1}, \tag{11}$$

где

$$G_n=\sum_{L=0}^{n}\gamma_{n-L}\sum_{k=0}^{L}C_k^{'}h_{L-k}^{'},\quad Q_n=\sum_{L=0}^{n}\gamma_{n-L}\sum_{k=0}^{L}C_k h_{L-k}, \tag{12}$$

$$\gamma_{2m}=0,\ \gamma_{2m+1}=-\frac{1}{a^{2m+2}},\ (m=0,1,...)$$

$$C_0^{'}=C_0=1,\ C_L^{'}=\frac{1}{L!}\prod_{k=1}^{L}(\nu-k+1),\ C_L=\frac{(-1)^L}{L!}\prod_{k=1}^{L}(\nu-k+1),$$

$$h_0^{'}=h_0=1,\ h_L^{'}=\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{k!}e_{k,L-k},\quad h_L=\sum_{k=1}^{L}\frac{(-1)^k}{k!}e_{k,L-k},$$

$$e_{m,0}=d_1^m,\ e_{m,L}=\frac{1}{Ld_1}\sum_{i=1}^{L}(im-L+i)d_{i+1}e_{m,L-i}\ .$$

Подставляя выражения (10) ,(11) в дифференциальное уравнение (9) и сравнивая коэффициенты при ξ с одинаковыми степенями, получим систему алгебраических уравнений вида

$$A_{2n}=\frac{2(\mathrm{n}+1)\mathrm{A}_{2(\mathrm{n}+1)}+\alpha G_{2n+1}+\delta Q_{2n+1}}{2(n+1)-\nu},\quad n=N,N-1,...,0.$$

Кривизна струи $d\theta/ds$ в точке отрыва должна быть конечной. На свободной линии тока СД $\omega=-i\theta$, $id\omega=d\theta$. В точке С $i\,d\omega=\frac{d\omega}{du}(0)$, причем

$$\frac{d\omega}{du}(0)=-\nu-d_1,\ ds=0. \tag{13}$$

Так как при $u=0$ $ds=0$, то выражение (13) также должно равняться нулю $\nu+d_1=0$. С помощью правила Лопиталя определяется кривизна струи в точке отрыва

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{\pi V_0}{2q}a^2\left[2A_2-(2-\nu)A_0\right]. \tag{14}$$

Кривизна оболочки $1/R_2$ в точке отрыва потока

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{\pi V_0(\alpha+\delta)}{2q}=\frac{1}{R_2} \tag{15}$$

должна быть больше или равна кривизне струи в этой точке для того, чтобы существовало решение, допустимое с физической точки зрения, при котором свободные линии тока не пересекают поверхность оболочки, т. е.

$$\frac{\alpha+\delta}{a^2}\geq\left(2A_2-(2-\nu)A_0\right(.$$

Скорость жидкости на бесконечности V_∞ определяется по формуле

$$V_\infty=V_0\exp\left[(a)\right]. \tag{16}$$

Сопротивление оболочки *X* находится

$$X=\rho$$

$$X = \rho V_\infty^2 H \left(\frac{V_0}{V\infty} - 1 \right)^2 . \qquad (17)$$

Коэффициент давления C_p на поверхности оболочки определяется

$$C_p = \frac{2(P - P_0)}{\rho V_0^2} = 1 - \frac{V^2}{V_0^2},\ \xi \in [0,1].$$

2. Форма оболочки. Параметрические уравнения линии поперечного сечения оболочки записываются

$$x = \frac{2q}{\pi} \cdot \int_1^{\xi_1} \frac{\cos\theta(\xi)}{V(\xi)} \cdot \frac{\xi}{\xi^2 - a^2} d\xi,\ \ y = \frac{2q}{\pi} \cdot \int_1^{\xi_1} \frac{\sin\theta(\xi)}{V(\xi)} \cdot \frac{\xi}{\xi^2 - a^2} d\xi,$$

$$s = \frac{2q}{\pi} \cdot \int_1^{\xi_1} \frac{1}{V(\xi)} \cdot \frac{\xi}{\xi^2 - a^2} d\xi . \qquad 18)$$

Геометрические соотношения следующие

$x_E = x_c + R_2$ (-sin θ_c + sin θ_E), $y_E = y_c + R_2$ (cos θ_c - cos θ_E), $s_E = s_c + R_2 (\theta_E - \theta_C)$, (19)

где x_C, y_C , x_E, y_E - координаты точек С и Е (рис. 1а), θ_c, θ_E - углы между осью x и касательной к линии поперечного сечения оболочки в сечениях С и Е, s_C, s_E - длины дуг ВС и ВСЕ, причем x_C, y_C, s_C определяются с помощью выражений (3) при $\xi = 0$.

Угол θ_C определяется по формуле

$$\theta_C = -\frac{\pi\nu}{2} - A_0. \qquad (20)$$

Основные соотношения задачи приведены к безразмерному виду: линейные величины отнесены к H, давления - к $(P^* - P_0)$, скорости - к V_0, усилия - к $(P^* - P_0)$ H. Результаты расчетов формы оболочки, распределения давлений, свободных линий тока для $\alpha = 0{,}09$; $\delta = 0{,}18$; a = 1,000005 даются на рис.2.

Сплошной и пунктирной линиями показаны распределения давлений на оболочке по дуге ВС и на прямолинейной стенке АД. На линии поперечного сечения оболочки нанесена точка С отрыва потока.

3. Случай $q = 0$. С уменьшением половины высоты канала при $H = H_0$ течение прекратится, т. е. $q = 0$, $V_\infty = 0$, $\varphi_C / q = \infty$, a = 1, $P = P^*$.

Уравнения Лапласа для оболочки записываются

$$T = (P_1 - P^*) R_1 = (P_1 - P_0) R_2,$$

где R_1, R_2 - радиусы кривизны оболочки на участках ВС и СЕ, соответственно (рис 1в).

Геометрические соотношения упрощаются

$$x_E = - R_1 \sin\theta_B + R_2 \sin\theta_E,\quad y_E = - R_1 (1 - \cos\theta_B) + R_2 (1 - \cos\theta_E),\quad s_E = - R_1 \theta_B + R_2 \theta_E.$$

Если заданы давления P_1, P^*, P_0 , координаты точки Е x_E, y_E, длина дуги ВСЕ, то решение системы четырех трансцендентных уравнений дает значения R_1, R_2, θ_B, θ_E.

Половина высоты канала Н определяется

$$H = R_1 (1 - \cos\theta_B) = R_2 (1 - \cos\theta_E),$$

4. Течение жидкости по мягкому соплу. Пусть углы между осью x и касательной к линии поперечного сечения оболочки в точках В и С равны нулю, т. е.

$$\theta_B = -\frac{\pi\nu}{2} = 0,\ \theta_C = -\frac{\pi\nu}{2} - A_0 = 0.$$

Из выражений (1) следует, что $\nu = A_0 = 0$. В этом случае уравнение (12) удобней записать в следующем виде

$$A_{2(n+1)} = A_{2n} = -\frac{\alpha G_{2n+1} + \delta Q_{2n+1}}{2(n+1) - \nu},\ \ n = 0,1,...$$

Функция $\omega(u)$ записывается

$$\omega(u) = \omega(u) = i\left(1-u^2\right)\sum_{n=0}^{N} A_{2n}u^{2n} - \sum_{n=0}^{N} d_{2n+1}u^{2n+1},\ |u|<1,$$

$$\omega(u) = \omega(u) = -\sum_{n=0}^{N} d\,©_{2n+1}u^{-(2n+1)},\ \ |u|>1.$$

Форма сопла определяется по формулам (18). В мягком сопле для выполнения условий (3) необходимо, чтобы $P^* > P_1 > P_0$. При этом $\alpha < 0$, $|\alpha| < \delta$.

Результаты расчетов формы сопла, распределения давлений на мягкой оболочке и на прямолинейной стенке АД даются на рис. 3 для $\alpha = -0{,}05$; $\delta = 0{,}1$; $a = 1{,}00001$. Коэффициент давления C_p в точке В возрастает до 1, т. к. угол между осью x и касательной к линии поперечного сечения в точке В $\theta_B = 0$, $\nu = 0{,}074$.

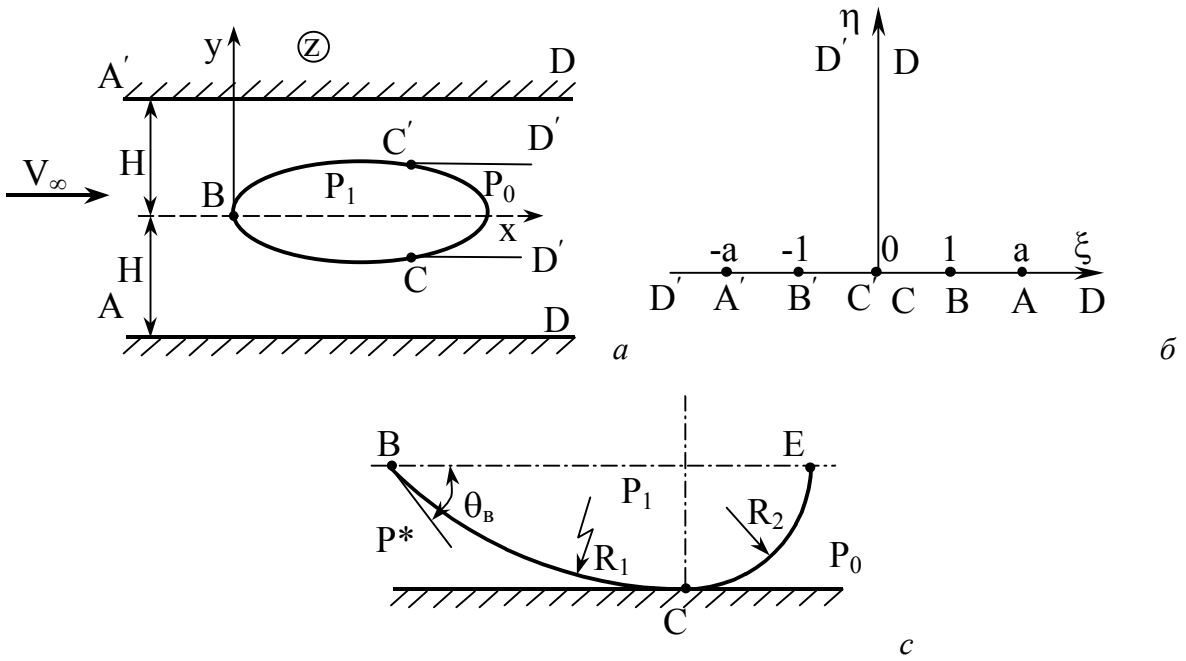

Рис. 1.

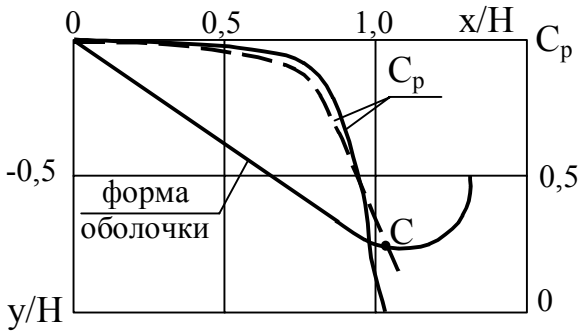

Рис.2.

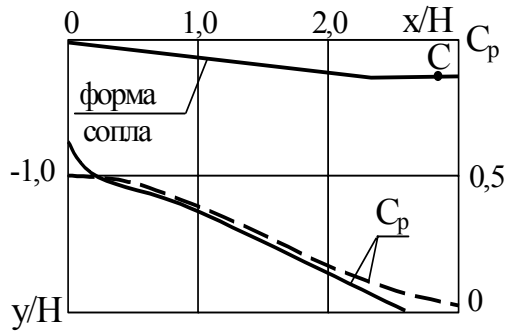

Рис. 3.

Литература

1. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости. М. ГИФМЛ. 1961.
2. *Киселев О.М, Федяев В.Л.* О струйном течении жидкости при наличии гибкого ограждения. Труды семинара по краевым задачам. Вып. 11. Изд. Казанского университета. 1974.
3. *Мавлютов Р.Р., Хакимов А.Г.* Большие перемещения упругих и упругопластических тел. Изд. БГУ. Уфа. 1995. 268 с.

4. *Dugan J.P.* A free steam line model of the two-dimensional sail. J. Fluid Mech. Vol. 42. N 3. 1970.