ОБЗОР АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДАННЫХ С ВОИИС

Рыбальченко Н.А., Денисов И.В., Седов В.А.

Морской государственный университет им. адм. Г.И. Невельского, г.Владивосток

В данной работе представлен краткий обзор алгебраических методов восстановления информации с ВОИИС. Показано, что для восстановления информации с ВОИИС неконструктивно применять прямые алгебраические методы. Показано, что из итерационных алгебраических методов восстановления информации с ВОИИС наиболее оптимальным методом является мультипликативный вариант метода ART.

В настоящее время в математической литературе существует много разнообразных вычислительных методов, применяемых для решения томографических задач (ТЗ), т.е. задач, направленных на восстановление функций пространственного распределения различных физических полей, например, деформационных, температурных и т.д.

Для сбора и обработки информации о состоянии физических полей, распределенных на некоторой площади, широко используются информационно-измерительные системы (ИИС). Одним из перспективных видов ИИС являются волоконно-оптические информационно-измерительные системы (ВОИИС) на базе распределенных волоконно-оптических измерительных сетей (ВОИС). В таких ВОИИС характеристики распространяющегося по исследуемой области излучения изменяются в зависимости от характеристик внешних физических полей, а сигнал на выходе ВОИС представляет собой набор линейных интегралов от функции исследуемого параметра физического поля, где количество информационных каналов меньше, чем число чувствительных областей ВОИИС. Такая задача является некорректной, поскольку не имеет единственного решения, поэтому задачу реконструкции пространственной функции распределения физических полей на ВОИИС наиболее перспективно решать, применяя методы волоконно-оптической томографии (ВОТЗ) [1]. Целью данной работы является сделать краткий обзор существующих алгебраических вычислительных методов, получивших своё применение в реконструктивной томографии для выбора наиболее оптимального метода для решения ВОТЗ.

Разнообразию вычислительных методов томографии способствует большое количество постановок ТЗ в зависимости от природы исследуемых физических процессов, методов сбора информации с помощью ИИС и способов их экспериментальной реализации. В связи с этим не прекращаются попытки разработок таких методов ТЗ, которые превосходили бы уже имеющиеся методы по каким-либо практически важным параметрам задачи. Такими параметрами являются: быстродействие метода, определяющее необходимость функционирования системы обработки на его основе в режиме реального времени; используемая для реализации вычислительных методов мощность ЭВМ; гибкость реализуемых реконструктивных алгоритмов в применении к новым физическим ситуациям и геометриям схем измерений; гибкость алгоритма к систематическим и случайным погрешностям и др. [2, 3].

Вычислительные методы, разработанные в настоящее время для решения ТЗ, в зависимости от используемого математического аппарата можно условно разделить на алгебраические, интегральные и нейроподобные. В свою очередь, все они подразделяются на методы, базирующиеся на общих математических законах, и созданные для целей, отличных от решения ТЗ, а также на методы, созданные специально для решения таковых задач.

Алгебраическими методами решения ТЗ называется группа вычислительных методов, в которых дискретизация осуществляется в начале их применения для решения ТЗ, за счет чего дальнейшее описание этих методов производится в дискретной форме, а каждая из решаемых ТЗ описывается системой алгебраических уравнений следующего вида [4, 5]:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{E}\,, \qquad (1)$$

где A – матрица размера m×n, задающая связь между исходным вектором Y (размерности m) томографических данных, получаемых с m измерительных линий или информационных каналов ИИС и неизвестным вектором F размерности n, который несет информацию о реконструируемых параметрах исследуемых физических полей и получается в ходе решения ТЗ; вектор E – это вектор искажений, полученных ИИС. Матрица A в операторном виде выражения (1) соответствует интегральному оператору рассматриваемой ТЗ. Для простоты дальнейшего изложения будем рассматривать идеальный случай, соответствующий линейной ТЗ, для которой вектор E нулевой. В общем случае решение СЛАУ (1) представляется в виде:

$$\boldsymbol{F} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{Y}$$

где A^{-1} является матрицей, обратной к A.

Для алгебраического решения ТЗ, описываемых СЛАУ (1), существует большое количество методов, классифицировать которые можно по-разному, причём их классификация часто носит условный характер [6]. К ним относятся прямые (точные) и итерационные (приближенные) методы решения СЛАУ (1). Последние из этих методов можно также разделить на общие методы, разработанные ранее в классических задачах вычислительной математики, и на специальные методы, разработанные непосредственно для решения ТЗ. Схема классификации алгебраических методов решения ТЗ изображена на рис. 1.

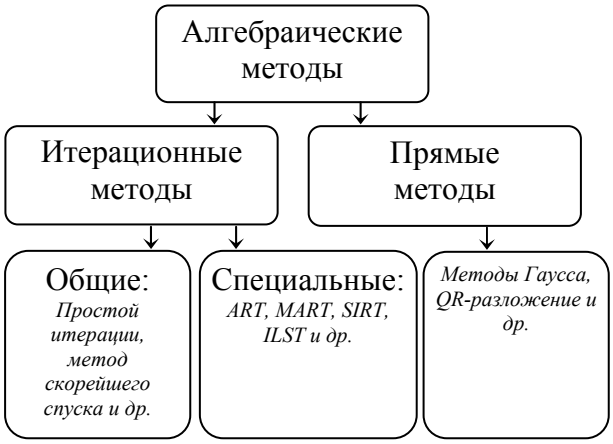

Рис.1. Классификация алгебраических методов решения томографических задач

Прямые методы решения СЛАУ (1) делятся на две группы: во-первых, это группа, объединённая под общим названием метод Гаусса [7 - 9], и, во-вторых, группа методов, связанных с умножением матрицы системы на ортогональные преобразующие матрицы [6].

В широком смысле метод Гаусса состоит в том, что элементарными преобразованиями строк матрицы A она превращается в матрицу, состоящую из нулей и единиц. Добавляя к матрице A вектор свободных членов Y, получается расширенная матрица. Дальнейшие преобразования над расширенной матрицей превращают последний столбец в решение системы (1). Последовательность элементарных преобразований над матрицей A можно выбирать различными способами, что обуславливает появление целого ряда алгоритмов [10, 11], реализующих метод Гаусса, таких как схема единственного деления (так называемый процесс прямого исключения или метод Гаусса в узком смысле) [6]; способ обратной подстановки; метод Жордана [7]; метод оптимального исключения [12] и т.д.

Вторая группа прямых алгебраических методов использует разложение матрицы A на множители. Например, в так называемом методе QR-разложения СЛАУ (1) сводится к системе следующего вида: $\mathbf{R}\widetilde{\boldsymbol{F}} = \mathbf{Q}^T\boldsymbol{F}$, где T означает знак транспонирования, R является верхней треугольной матрицей, а Q – ортогональной матрицей. Для получения QR-разложений наиболее распространены метод отражения и метод вращений.

Для сравнения вычислительных методов решения ТЗ и их составных частей между собой [13 - 15] используются следующие критерии, отражающие:

1.требования к объему оперативной памяти ЭВМ, используемых для реализации этих вычислительных методов;

2.число выполняемых в используемом методе арифметических операций, которое определяет время вычислений и, следовательно, скорость обработки данных, получаемых от ИИС;

3.качество восстановления исследуемой области, достижимое при помощи данных методов.

Первый критерий оценки вычислительных методов не включается в рассмотрение, т.к. современные компьютеры способны решать СЛАУ (1) любых размерностей, необходимых при решении реальных ТЗ.

По второму критерию необходимо отметить, что СЛАУ вида (1) не может быть решена с помощью меньшего числа операций, чем то, которое требуется в методе Гаусса [16] ($\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$ арифметических операций, из них $\frac{1}{3}n^3$ сложений, $\frac{1}{3}n^3$ умножений и $\frac{1}{3}n(n+1)$ делений, где n – размерность квадратной матрицы A) [6, 17].

Для выяснения третьей оценки считается достаточным [13] использование среднеквадратичной, абсолютной и максимальной оценок восстановления функций пространственного распределения физических полей, действующих на исследуемые объекты:

$$D = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(f_i - \widetilde{f}_i)^2}\ ,\ R = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\, f_i - \widetilde{f}_i\,|,\ E = \max_{1\le i\le n}|\, f_i - \widetilde{f}_i\,|,$$

где вектор $\widetilde{f} = (\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2, ..., \widetilde{f}_n)$ описывает восстановленные значения функции в элементах изображения, из которых состоит исследуемое поле, а вектор $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$ представляет собой истинные значения функции.

Методы Гаусса дают наилучшую точность при правильно выбранной последовательности главных элементов, однако они обладают серьезным недостатком – при вычислениях происходит быстрое накопление ошибок, что особенно сказывается на СЛАУ больших размерностей. С другой стороны методы, основанные на QR-разложении, свободны от этого недостатка, при этом метод отражений лучше метода вращений по количеству арифметических операций и требуемому объёму памяти [6, 13].

Ко второй части алгебраических вычислительных методов относятся итерационные методы (рис. 1). Итерационными являются методы, с помощью которых может быть построена последовательность, сходящаяся к решению ТЗ (1). В этом случае достаточно близкий к пределу член этой последовательности принимается за приближенное решение рассматриваемой системы. За счёт этого, получаемые приближенные решения в итерационных методах имеют неизбежную ошибку своего округления. Однако эта ошибка меньше, чем накапливаемая погрешность, полученная при решении СЛАУ (1) прямыми методами [6].

Важным вопросом при решении ТЗ итерационными методами является их сходимость к истинному решению. При этом приближения восстановленных значений функции $\{\widetilde{f}_k\}$ попадают в некоторую окрестность истинного решения f СЛАУ (1), и оценка абсолютной погрешности k-ого приближения вычисляется по следующей формуле:

$$\|\, \widetilde{f}_k - \widetilde{f}\, \| \le \varepsilon\,,$$

где ε характеризует окрестность допустимого приближённого решения.

Получив приближение из этой окрестности, вычисления останавливаются, т.к. дальнейший итерационный вычислительный процесс является непродуктивным и точность получаемого решения не увеличивается [6], а в некоторых случаях и понижается. Последняя

особенность, как правило, является критерием остановки выполняемого итерационного процесса [18].

Недостатком итерационных методов является тот факт, что не для любой СЛАУ существует сходящаяся последовательность, однако в этом случае, за счёт свойств матрицы A, можно преобразовать систему (1) так, чтобы метод сходился.

Итерационные методы для решения ТЗ разделяются на две группы. К первой относятся алгоритмы, созданные для реализации таких общих методов, как метод простой итерации или стационарный метод [9, 19]; метод Якоби [8, 20, 21]; метод Зейделя или метод последовательных смещений [21]; метод скорейшего спуска [22]; метод верхней релаксации [9] и др. Ко второй группе методов относятся методы, разработанные непосредственно для задач томографии, например, ART (algebraic reconstruction technique) [15, 23]; SIRT (simultaneous iterative reconstruction technique) [24]; ILST (iterative least reconstruction technique) [25]; MENT (Maximum Entropy), и многие другие.

Методы Якоби и Зейделя требуют выполнения в вычислительном процессе $2n^2$ операций умножения, $2n^2$ операций сложения и n операций деления, где n – размерность матрицы A. Недостатками этих методов является то, что для их сходимости необходимо диагональное преобладание элементов в матрице A или её симметричность, а т.к. ТЗ в редких случаях описывается симметричной матрицей A или матрицей A с диагональным преобладанием, то множество решаемых ТЗ значительно сужается [26].

Метод скорейшего спуска обладает тем достоинством, что в нем не требуется информации о собственных значениях матрицы A. Как и метод простой итерации, данный метод сходится со скоростью геометрической прогрессии, хотя для плохо обусловленных матриц эта сходимость может быть очень медленной. Для ускорения сходимости используется релаксационный множитель, величину которого, близкую к единице, подбирают из других, как правило, эмпирических, соображений [13].

Наиболее популярным среди специальных методов является метод ART. Этот метод успешно зарекомендовал себя еще в первом медицинском томографе Хаунсфильда [27], а затем в электронной микротомографии [2]. В работе [28] этот метод используется для трёхмерной трансмиссионной томографии при восстановлении данных с источников, движущихся по спирали. Для метода ART разработано много модификаций [3, 23].

В одной из модификаций ART, получившей название ART2, вводится промежуточная оценка, по которой определяется очередное приближение в частично ограниченном и полностью ограниченном вариантах метода ART. Модификации ART3, и ART4, в которых система (1) заменяется системой неравенств, позволяет решать ТЗ с большим уровнем шумов [3, 18, 29]. Среди других модификаций метода ART интересен мультипликативный вариант MART [15, 30]. Этот метод обладает тем свойством, что если какая-либо компонента искомого вектора стала равной нулю, то она остаётся нулевой на всех последующих итерациях метода MART. Это свойство позволяет эффективно использовать информацию о границах исследуемого объекта, поскольку вне этих границ значения компонент восстанавливаемого вектора равны нулю [13].

Метод SIRT был предложен для уменьшения влияния погрешностей измерений, что достигается участием в каждой итерации одновременно всех измеренных величин [15], а также для того, чтобы уменьшить влияние неадекватности определения элементов матрицы A СЛАУ (1) путём приведения её к симметричному виду [13].

Отличительной чертой алгоритма MENT [31, 32] является возможность использования его в трехмерной томографии и обходиться при этом весьма небольшим числом проекций в тех случаях, когда другие алгоритмы порождают неприемлемые артефакты [2].

Метод CSP (cyclic subgradient projection) [33] способен максимально использовать априорную информацию о характеристиках исследуемых областей, например, о пространственном распределении поглощающей среды, что позволяет увеличить точность осуществляемого восстановления исследуемых областей.

Сходимость итерационных методов, очень быстрая на первых итерациях, на последующих итерациях сильно замедляется, причём алгоритмы типа ART сходятся значительно быстрее алгоритмов типа SIRT. Алгоритмы квадратичной оптимизации типа ILST занимают по скорости сходимости промежуточное место. По отношению к зашумлённости исходных данных наиболее устойчивыми являются алгоритмы типа SIRT, которые удовлетворительно работают в тех случаях, когда другие методы дают недопустимые искажения. В случае большой недоопределённости исходной СЛАУ (1), т.е. когда $m < n/3$, лучше всего работают алгоритмы типа ART [13].

Таким образом, общие выводы, которые могут быть сделаны из всего сказанного об алгебраических методах решения ТЗ, сводятся к следующему:

В тех случаях, когда матрица А является квадратной и имеет среднюю размерность, достаточно применять прямые методы решения СЛАУ (1). Достоинством прямых методов является их простота реализации. Однако они обладают целым рядом недостатков, из-за которых их применение признаётся неконструктивным и фактически не позволяет их использовать на практике для решения ТЗ [2]:

1.В большинстве прикладных ТЗ размерность системы (1) большая, т.е. может содержать свыше 106 элементов, причём количество элементов, отличных от нуля, менее 2%, что часто приводит к большому накоплению ошибок при решении СЛАУ (1), даже при использовании методов отражения или вращений;

2.Прямые методы перспективно использовать только в тех случаях, когда матрица А квадратная, между тем большинство практических ТЗ требует использования неквадратных матриц системы, причем как переопределённых, так и недоопределённых;

3.Во многих ТЗ в СЛАУ (1) матрица А является плохо обусловленной, и решение таких ТЗ требует устойчивых методов решения, при этом восстановление исследуемых физических полей очень грубое [34];

4.Для устойчивого решения многих ТЗ необходимо введение в вычислительный алгоритм дополнительной априорной информации об исследуемой области и некоторые другие сведения, а прямые методы не способны учитывать априорную информацию, что делает невозможным получение верного решения такой ТЗ [2].

Для того чтобы избежать этих недостатков при поиске решения ТЗ требуется применять итерационные методы. Как было показано выше, каждый итерационный метод обладает сильными и слабыми сторонами. Поэтому предпочтение тому или иному вычислительному алгебраическому методу следует отдавать в зависимости от специфики экспериментальной постановки ТЗ [2].

В контексте исследуемой ВОТЗ важными требованиями к вычислительным методам являются высокая скорость обработки данных с ИИС, в качестве которых выступают ВОИС, образованные волоконно-оптическими измерительными линиями (ВОИЛ), и высокое качество восстановления функций пространственного распределения физических полей, действующих на ВОИС исследуемых объектов. Из всех упомянутых алгебраических итерационных методов теми свойствами, которые требуются для ВОТЗ, обладают алгебраические методы типа ART. Они достаточно быстры и обладают высоким качеством восстановления исследуемых областей по сравнению с другими итерационными методами. Алгоритмы типа ART хорошо работают при большой недоопределённости исходной СЛАУ (1), что является положительным свойством при практической реализации ВОТЗ, т.к. для практической реализации ВОИС очень важным является вопрос уменьшения количества ВОИЛ, по которым идёт информация о параметрах физических полей, восстановление которых требует ВОТЗ.

Для выбора лучшего из ART методов, следует заметить, что любая априорная информация о реальных исследуемых объектах очень важна для вычислительного алгоритма, т.к. позволяет специфицировать задачу и установить граничные условия для решаемых уравнений. В ВОТЗ изначально всегда накладывается ряд ограничений на их практические

реализации, связанные с условиями прокладки ВОИЛ, типом их изготовления, с внешними условиями функционирования ВОИС и выбором схемы укладки ВОИЛ в ВОИС. За счет этого восстанавливаемый вектор получает большое количество нулевых компонент. Поэтому логичным является применение для ВОТЗ итерационных методов, которые способны использовать подобную дополнительную информацию о восстанавливаемом векторе. Метод MART как раз и обладает тем свойством, что при получении в промежуточных итерациях нулевой компоненты восстанавливаемого вектора, эта компонента остаётся равной нулю и не изменяется при следующих итерациях. Это свойство позволяет при получении нулевой компоненты в восстанавливаемом векторе сохранить её в последующих итерациях, что значительно увеличивает качество восстановления при решении ВОТЗ. Кроме того, важным фактом является то, что при решении ВОТЗ матрица А в СЛАУ (1) является разреженной, с расположением ненулевых элементов матрицы А по определённому, наперед заданному закону. Итерационные методы типа MART позволяют сохранять свойство разрежённости матрицы А [35 - 37]. Таким образом, метод MART является оптимальным алгебраическим методом для решения ВОТЗ.

Литература

1. *Кульчин Ю.Н.* Распределенные волоконно-оптические измерительные системы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 272с.
2. *Пикалов В.В., Преображенский Н.Г.* – УФН, 1983, т.141, с.469-497.
3. *Хермен Г.* Восстановление изображений по проекциям: Основы реконструктивной томографии. Пер. с анг. – М.: Мир, 1983.
4. *V. Denisov, E. V. Denisova, N. A. Rybalchenko, V. A. Sedov*. Definition of the fiber-optical tomography problem // Physics and Control – PhysCon 2005. Proc. of IEEE. – P.186-189.
5. *I.V.Denisov, Yury N. Kulchin, Elena V. Denisova* Synthesis of approximate algebraic and neural-like methods for the solution of the tomography problem Current Research on Holography and Interferometric Methods for Measurement of Object Properties. Proc. of SPIE, 2003. – V. 5134. – P. 83-89.
6. *Беклемишев Д.В*. Дополнительные главы линейной алгебры. – М.: Наука, 1983.
7. *Fox L.,* An Introduction to numerical linear algebra, Oxford, Clarendon press, 1964.
8. *Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В.* Вычислительные методы для инженеров. М.: Высш. шк., 1995, 544 с.
9. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры.-3-е, стер. изд. - СПб: Лань, 2002, 733 с.
10. *Форсайт Дж., Молер К.* Численное решение систем линейных алгебраических уравнений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1969.
11. *Загускин В.П.* Справочник по численным методам решения уравнений. – М.: Физматгиз, 1960.
12. *Воеводин В.В.* Линейная алгебра. – М.: Наука, 1974.
13. *Терещенко С.А.* Методы вычислительной томографии. – М.: Физматлит, 2004. – 320 с.
14. *Censor Я.* Методы реконструкции изображений, основанные на разложении в конечные ряды // ТИИЭР, 1983. – Т.71, № 3. – с.148-160.
15. *Herman G.T., Lent A.* Iterative reconstruction algorithms // Computers in Biology and Medicine, 1976. – V. 6. – p. 273-294.
16. *Клюев В.В., Коковкин-Щербак Н.И.* О минимизации числа арифметических операций при решении линейных алгебраических систем уравнений. – ЖВМ и МФ, 1965, т.5, №1, с.21-33.
17. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. – М.: Наука,1989.

18. *Вишняков Г.Н., Машевская О.И.* Исследование точности алгебраического алгоритма реконструкции томограмм по проекциям, заданным в ограниченном диапазоне углов //Измерительная техника, 2005. - № 8.- с.34-37.
19. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. – М.: Наука,1973. – 632 с.
20. *Д. Поттер*, Вычислительные методы в физике, М: Наука, 1975, 394 с.
21. *Демидович Б.П, Марон И.А*. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970, 664 с.
22. *Бут Э.Д.* Численные методы. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 240 с.
23. *Gordon R.A.* A tutorial on ART // IEEE Tr. On Nuclear Sciences, 1974. – V. NS-21, No.1. – p.78-93.
24. *Colsher J.G.* Iterative three-dimensional image reconstruction from tomographic projections study // Computer Graphics and Image Processing, 1977. – V.6.- p.513-537.
25. *Goitein M*. Three--dimensional density reconstruction from a series of two-dimensional projections // Nuclear Instruments and Methods, 1972. – V. 101. – p. 509-518.
26. *Дж. Ортега* Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. – М.: Мир, 1991.
27. *Haunsfield G.N.* Computerized transverse axial scanning (tomography). I. Description of system // Brit. J. Radiol. – 1973. – vol. 46, № 552. – p. 1016-1022.
28. *Пикалов В.В, Лихачев А.В*. Сравнение алгоритмов спиральной томографии // Вычислительные методы и программирование, 2004, т.5., стр.170-183.
29. *Губарени Н.М., Попова Т.И*. Итерационный алгебраический метод восстановления томограмм из суммарного изображения при малом числе проекций. // Электронное моделирование. -1990. -Т.12. No.1. -С. 85-90.
30. *A.V.Likhachov, V.V.Pickalov, N.V.Chugunova, V.A.Baranov* Development of Iterative Algorithms for Industrial Tomography 1st World Congress on Industrial Process Tomography, Buxton, Greater Manchester, April 14-17, 1999, p.463-469.
31. *Minerbo G.N*. MENT: a maximum entropy algorithm for reconstructing a source from projection data. // Computer graphics and image processing v.10 p.48 - 68 (1978)
32. *Reis Maria L. and Nilson Costa Roberty*. Maximum entropy algorithms for reconstruction from projections. Inverse problems 1992 N8 p.623 - 644.
33. *Censor Y., Gustafson D.E., Lent A., Tuy H*. A new approach to the emission computerized tomography problem: simultaneous calculation of attenuation and activity coefficients // IEEE Tr. On Nuclear Sciences, 1979. – V. NS-26, No. 2. – p. 2775-2779.
34. *Сизиков В.С*. Математические методы обработки результатов измерений: Учебник для вузов.- СПб: Политехника, 2001. 240с.
35. *Тьюарсон Р*. Разреженные матрицы / Пер. с англ. М.: Мир, 1977. 191с.
36. *Брамеллер А., Аллан Р., Хэмэм Я.* Слабозаполненные матрицы / Пер. с англ. М.: Энергия, 1979. 192с.
37. *Писсанецки С*. Технология разреженных матриц / Пер. с англ. М.: Мир, 1988. 410с.