

ВИБРОДИАГНОСТИКА ПОВРЕЖДЕНИЙ СТЕРЖНЯ

Хакимов А.Г.

ФГБУН Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН,

г.Уфа

hakimov@anrb.ru

Если стержень имеет единственное повреждение типа поперечной раскрытой трещины, то для определения его координаты, длины и параметров повреждения могут быть использованы три низшие частоты изгибных или крутильных или продольных колебаний. По этим параметрам определяются осевой момент инерции, полярный момент инерции, площадь поперечного сечения единственного повреждения повреждения.

В случае стержней конечной длины для определения наличия его дефектов может быть использовано изменение спектра собственных частот продольных колебаний [1-8], крутильных колебаний [9-11] или изменение частоты собственных изгибных колебаний [12-13]. В [1] и ряде других работ для стержня, совершающего продольные колебания, трещина моделируется как продольная пружина с жесткостью и для балки, совершающей изгибные колебания, повреждение моделируется вращательной пружинкой с жесткостью. В [3] дается решение задачи определения переменной площади поперечного сечения от продольной координаты по известной зависимости перемещения свободного конца стержня от частоты возмущающей силы. Решению обратных задач о продольных, крутильных и изгибных установившихся волнах в стержнях конечной длины посвящены работы [2, 4-13]. Метод конечных элементов используется для анализа изгибных колебаний невращающегося ротора с открытыми трещинами в [14]. В [15] представлен интегральный признак идентификации дефектов в элементах стержневых конструкций, позволяющий определять не только их наличие и местоположение, но и степень поврежденности.

Здесь по собственным частотам изгибных, крутильных и продольных колебаний определяются координата, длина и параметры единственного повреждения: осевой момент инерции, полярный момент инерции, площадь поперечного сечения.

1. Изгибные колебания. Рассматривается напряженно-деформированное состояние консольной балки (рис. 1). Предполагается, что в балке имеется короткий участок (по сравнению с общей ее длиной) с меньшей площадью поперечного сечения. Этот надрез моделирует ее повреждение, в частности, повреждение, типа раскрытой трещины. Задача состоит в определении координаты надреза и его размеров в приближении гипотезы плоских сечений.

Обозначим через L, J длину и момент инерции поперечного сечения балки, E, ρ – модуль упругости, плотность, через l, x_c, \tilde{J} – длину надреза, его координату, момент инерции поперечного сечения в зоне надреза, w – прогиб балки.

Уравнение, определяющее форму изгибных колебаний балки, имеет вид

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \lambda^{*4} w, \quad \lambda^* = \sqrt[4]{\frac{m_l \omega^2}{EJ}}, \quad (1.1)$$

где m_l – масса единицы длины балки, ω – частота. Отсчитывая координату x от точки крепления, запишем граничные условия

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (x = 0), \quad M = Q = 0 \quad (x = L), \quad (1.2)$$

где M, Q – изгибающий момент и перерезывающая сила, которые определяются по формулам

$$M = EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, Q = EJ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}. \quad (1.3)$$

Обозначая функции в областях $0 \leq x \leq x_c$, $x_c \leq x \leq x_c + l$, $x_c + l \leq x \leq L$ индексами «1», «2», «3», соответственно, запишем условия стыкования решений при $x = x_c$ и $x = x_c + l$ (условия равенства перемещений, углов поворота, моментов, перерезывающих сил)

$$\begin{aligned} w_1 = w_2, \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x}, M_1 = M_2, Q_1 = Q_2, \quad (x = x_c), \\ w_2 = w_3, \frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial w_3}{\partial x}, M_2 = M_3, Q_2 = Q_3, \quad (x = x_c + l), m = \frac{\tilde{J}}{J}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Условия (1.4) с учетом (1.3) записываются в виде

$$\begin{aligned} w_1 = w_2, \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x}, \frac{\partial w_1^2}{\partial x} = m \frac{\partial w_2^2}{\partial x}, \frac{\partial w_1^3}{\partial x} = m \frac{\partial w_2^3}{\partial x}, \quad (x = x_c), \\ w_2 = w_3, \frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial w_3}{\partial x}, m \frac{\partial w_2^2}{\partial x} = \frac{\partial w_3^2}{\partial x}, m \frac{\partial w_2^3}{\partial x} = \frac{\partial w_3^3}{\partial x}, \quad (x = x_c + l). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Пользуясь в дальнейшем обозначениями

$$\xi = \frac{x}{L}, \xi_c = \frac{x_c}{L}, \xi_{cl} = \frac{x_c + l}{L}, w = \frac{w}{L}, \varepsilon = \frac{l}{L}, \Omega^2 = \frac{\rho L^2 \omega^2}{E},$$

представим (1.2), (1.5) в виде

$$\begin{aligned} w_1 = 0, \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = 0 \quad (\xi = 0), \quad \frac{\partial^2 w_3}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^3 w_3}{\partial \xi^3} = 0 \quad (\xi = 1), \\ w_1 = w_2, \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x}, \frac{\partial w_1^2}{\partial x} = m \frac{\partial w_2^2}{\partial x}, \frac{\partial w_1^3}{\partial x} = m \frac{\partial w_2^3}{\partial x}, \quad (x = x_c), \\ w_2 = w_3, \frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial w_3}{\partial x}, m \frac{\partial w_2^2}{\partial x} = \frac{\partial w_3^2}{\partial x}, m \frac{\partial w_2^3}{\partial x} = \frac{\partial w_3^3}{\partial x}, \quad (x = x_c + l). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Таким образом, в приведенной простейшей модели надреза фигурируют длина надреза l , его координата ξ_c и параметр надреза m .

Прогиб балки на трех участках представляется в виде [16]

$$\begin{aligned} w_1 = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4, \\ w_2 = C_5 y_1 + C_6 y_2 + C_7 y_3 + C_8 y_4, \\ w_3 = C_9 y_1 + C_{10} y_2 + C_{11} y_3 + C_{12} y_4, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} y_1 = \frac{\cos \lambda \xi + \operatorname{ch} \lambda \xi}{2}, y_2 = \frac{\sin \lambda \xi + \operatorname{sh} \lambda \xi}{2}, \\ y_3 = \frac{-\cos \lambda \xi + \operatorname{ch} \lambda \xi}{2}, y_4 = \frac{-\sin \lambda \xi + \operatorname{sh} \lambda \xi}{2}, \lambda^4 = \lambda^* L^4, \end{aligned}$$

линейно независимые решения уравнения (1.1) [16], удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0, y_1''(0) = 0, y_1'''(0) = 0, \\ y_2(0) = 0, y_2'(0) = \lambda, y_2''(0) = 0, y_2'''(0) = 0, \\ y_3(0) = 0, y_3'(0) = 0, y_3''(0) = \lambda^2, y_3'''(0) = 0, \\ y_4(0) = 0, y_4'(0) = 0, y_4''(0) = 0, y_4'''(0) = \lambda^3. \end{aligned}$$

Функции y_1, y_2, y_3, y_4 связаны между собой соотношениями

$$\begin{aligned}
y_1' &= \lambda y_4, y_2' = \lambda y_1, y_3' = \lambda y_2, y_4' = \lambda y_3, \\
y_1'' &= \lambda^2 y_3, y_2'' = \lambda^2 y_4, y_3'' = \lambda^2 y_1, y_4'' = \lambda^2 y_2, \\
y_1''' &= \lambda^3 y_2, y_2''' = \lambda^3 y_3, y_3''' = \lambda^3 y_4, y_4''' = \lambda^3 y_1.
\end{aligned}$$

Граничные условия и условия (1.5) в развернутом виде записываются

$$C_1 = 0, C_2 = 0,$$

$$C_9 y_1''(1) + C_{10} y_2''(1) + C_{11} y_3''(1) + C_{12} y_4''(1) = 0,$$

$$C_9 y_1'''(1) + C_{10} y_2'''(1) + C_{11} y_3'''(1) + C_{12} y_4'''(1) = 0,$$

$$C_3 y_3(\xi_c) + C_4 y_4(\xi_c) = C_5 y_1(\xi_c) + C_6 y_2(\xi_c) + C_7 y_3(\xi_c) + C_8 y_4(\xi_c),$$

$$C_3 y_3'(\xi_c) + C_4 y_4'(\xi_c) = C_5 y_1'(\xi_c) + C_6 y_2'(\xi_c) + C_7 y_3'(\xi_c) + C_8 y_4'(\xi_c),$$

$$C_3 y_3''(\xi_c) + C_4 y_4''(\xi_c) = m [C_5 y_1''(\xi_c) + C_6 y_2''(\xi_c) + C_7 y_3''(\xi_c) + C_8 y_4''(\xi_c)],$$

$$C_3 y_3'''(\xi_c) + C_4 y_4'''(\xi_c) = m [C_5 y_1'''(\xi_c) + C_6 y_2'''(\xi_c) + C_7 y_3'''(\xi_c) + C_8 y_4'''(\xi_c)],$$

$$C_5 y_1(\xi_{cl}) + C_6 y_2(\xi_{cl}) + C_7 y_3(\xi_{cl}) + C_8 y_4(\xi_{cl}) =$$

$$= C_9 y_1(\xi_{cl}) + C_{10} y_2(\xi_{cl}) + C_{11} y_3(\xi_{cl}) + C_{12} y_4(\xi_{cl}),$$

$$C_5 y_1'(\xi_{cl}) + C_6 y_2'(\xi_{cl}) + C_7 y_3'(\xi_{cl}) + C_8 y_4'(\xi_{cl}) =$$

$$= C_9 y_1'(\xi_{cl}) + C_{10} y_2'(\xi_{cl}) + C_{11} y_3'(\xi_{cl}) + C_{12} y_4'(\xi_{cl}),$$

$$m [C_5 y_1''(\xi_{cl}) + C_6 y_2''(\xi_{cl}) + C_7 y_3''(\xi_{cl}) + C_8 y_4''(\xi_{cl})] =$$

$$= C_9 y_1''(\xi_{cl}) + C_{10} y_2''(\xi_{cl}) + C_{11} y_3''(\xi_{cl}) + C_{12} y_4''(\xi_{cl}),$$

$$m [C_5 y_1'''(\xi_{cl}) + C_6 y_2'''(\xi_{cl}) + C_7 y_3'''(\xi_{cl}) + C_8 y_4'''(\xi_{cl})] =$$

$$= C_9 y_1'''(\xi_{cl}) + C_{10} y_2'''(\xi_{cl}) + C_{11} y_3'''(\xi_{cl}) + C_{12} y_4'''(\xi_{cl}),$$

(1.7)

Уравнения (1.7) с учетом вышеприведенных соотношений принимают вид

$$C_9 y_3(1) + C_{10} y_4(1) + C_{11} y_1(1) + C_{12} y_2(1) = 0,$$

$$C_9 y_2(1) + C_{10} y_3(1) + C_{11} y_4(1) + C_{12} y_1(1) = 0,$$

$$C_3 y_3(\xi_c) + C_4 y_4(\xi_c) = C_5 y_1(\xi_c) + C_6 y_2(\xi_c) + C_7 y_3(\xi_c) + C_8 y_4(\xi_c),$$

$$C_3 y_2(\xi_c) + C_4 y_3(\xi_c) = C_5 y_4(\xi_c) + C_6 y_1(\xi_c) + C_7 y_2(\xi_c) + C_8 y_3(\xi_c),$$

$$C_3 y_1(\xi_c) + C_4 y_2(\xi_c) = m [C_5 y_3(\xi_c) + C_6 y_4(\xi_c) + C_7 y_1(\xi_c) + C_8 y_2(\xi_c)],$$

$$C_3 y_4(\xi_c) + C_4 y_1(\xi_c) = m [C_5 y_2(\xi_c) + C_6 y_3(\xi_c) + C_7 y_4(\xi_c) + C_8 y_1(\xi_c)],$$

$$C_5 y_1(\xi_{cl}) + C_6 y_2(\xi_{cl}) + C_7 y_3(\xi_{cl}) + C_8 y_4(\xi_{cl}) =$$

$$= C_9 y_1(\xi_{cl}) + C_{10} y_2(\xi_{cl}) + C_{11} y_3(\xi_{cl}) + C_{12} y_4(\xi_{cl}),$$

$$C_5 y_4(\xi_{cl}) + C_6 y_1(\xi_{cl}) + C_7 y_2(\xi_{cl}) + C_8 y_3(\xi_{cl}) =$$

$$= C_9 y_4(\xi_{cl}) + C_{10} y_1(\xi_{cl}) + C_{11} y_2(\xi_{cl}) + C_{12} y_3(\xi_{cl}),$$

$$m [C_5 y_3(\xi_{cl}) + C_6 y_4(\xi_{cl}) + C_7 y_1(\xi_{cl}) + C_8 y_2(\xi_{cl})] =$$

$$= C_9 y_3(\xi_{cl}) + C_{10} y_4(\xi_{cl}) + C_{11} y_1(\xi_{cl}) + C_{12} y_2(\xi_{cl}),$$

$$m [C_5 y_2(\xi_{cl}) + C_6 y_3(\xi_{cl}) + C_7 y_4(\xi_{cl}) + C_8 y_1(\xi_{cl})] =$$

$$= C_9 y_2(\xi_{cl}) + C_{10} y_3(\xi_{cl}) + C_{11} y_4(\xi_{cl}) + C_{12} y_1(\xi_{cl}),$$

(1.8)

Разложим функции $y_1(\xi_{cl}), y_2(\xi_{cl}), y_3(\xi_{cl}), y_4(\xi_{cl})$ в окрестности точки ξ_c в ряды по степеням ϵ

$$\begin{aligned}
y_1(\xi_c) &= y_1(\xi_c) + \lambda y_4(\xi_c) \varepsilon, \\
y_2(\xi_c + \varepsilon) &= y_2(\xi_c) + \lambda y_1(\xi_c) \varepsilon, \\
y_3(\xi_c + \varepsilon) &= y_3(\xi_c) + \lambda y_2(\xi_c) \varepsilon, \\
y_4(\xi_c + \varepsilon) &= y_4(\xi_c) + \lambda y_3(\xi_c) \varepsilon,
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Система уравнений (1.8) с учетом соотношений (1.9) записывается

$$\begin{aligned}
C_9 y_3(1) + C_{10} y_4(1) + C_{11} y_1(1) + C_{12} y_2(1) &= 0, \\
C_9 y_2(1) + C_{10} y_3(1) + C_{11} y_4(1) + C_{12} y_1(1) &= 0, \\
C_3 y_3(\xi_c) + C_4 y_4(\xi_c) &= C_5 y_1(\xi_c) + C_6 y_2(\xi_c) + C_7 y_3(\xi_c) + C_8 y_4(\xi_c), \\
C_3 y_2(\xi_c) + C_4 y_3(\xi_c) &= C_5 y_4(\xi_c) + C_6 y_1(\xi_c) + C_7 y_2(\xi_c) + C_8 y_3(\xi_c), \\
C_3 y_1(\xi_c) + C_4 y_2(\xi_c) &= m [C_5 y_3(\xi_c) + C_6 y_4(\xi_c) + C_7 y_1(\xi_c) + C_8 y_2(\xi_c)], \\
C_3 y_4(\xi_c) + C_4 y_1(\xi_c) &= m [C_5 y_2(\xi_c) + C_6 y_3(\xi_c) + C_7 y_4(\xi_c) + C_8 y_1(\xi_c)], \\
C_5 [y_1(\xi_c) + \lambda y_4(\xi_c) \varepsilon] + C_6 [y_2(\xi_c) + \lambda y_1(\xi_c) \varepsilon] + \\
+ C_7 [y_3(\xi_c) + \lambda y_2(\xi_c) \varepsilon] + C_8 [y_4(\xi_c) + \lambda y_3(\xi_c) \varepsilon] &= \\
= C_9 [y_1(\xi_c) + \lambda y_4(\xi_c) \varepsilon] + C_{10} [y_2(\xi_c) + \lambda y_1(\xi_c) \varepsilon] + \\
+ C_{11} [y_3(\xi_c) + \lambda y_2(\xi_c) \varepsilon] + C_{12} [y_4(\xi_c) + \lambda y_3(\xi_c) \varepsilon], \\
C_5 [y_4(\xi_c) + \lambda y_3(\xi_c) \varepsilon] + C_6 [y_1(\xi_c) + \lambda y_4(\xi_c) \varepsilon] + \\
+ C_7 [y_2(\xi_c) + \lambda y_1(\xi_c) \varepsilon] + C_8 [y_3(\xi_c) + \lambda y_2(\xi_c) \varepsilon] &= \\
= C_9 [y_4(\xi_c) + \lambda y_3(\xi_c) \varepsilon] + C_{10} [y_1(\xi_c) + \lambda y_4(\xi_c) \varepsilon] + \\
+ C_{11} [y_2(\xi_c) + \lambda y_1(\xi_c) \varepsilon] + C_{12} [y_3(\xi_c) + \lambda y_2(\xi_c) \varepsilon]. \\
m \{ C_5 [y_3(\xi_c) + \lambda y_2(\xi_c) \varepsilon] + C_6 [y_4(\xi_c) + \lambda y_3(\xi_c) \varepsilon] \} + \\
+ m \{ C_7 [y_1(\xi_c) + \lambda y_4(\xi_c) \varepsilon] + C_8 [y_2(\xi_c) + \lambda y_1(\xi_c) \varepsilon] \} &= \\
= C_9 [y_3(\xi_c) + \lambda y_2(\xi_c) \varepsilon] + C_{10} [y_4(\xi_c) + \lambda y_3(\xi_c) \varepsilon] + \\
+ C_{11} [y_1(\xi_c) + \lambda y_4(\xi_c) \varepsilon] + C_{12} [y_2(\xi_c) + \lambda y_1(\xi_c) \varepsilon], \\
m \{ C_5 [y_2(\xi_c) + \lambda y_1(\xi_c) \varepsilon] + C_6 [y_3(\xi_c) + \lambda y_2(\xi_c) \varepsilon] \} + \\
+ m \{ C_7 [y_4(\xi_c) + \lambda y_3(\xi_c) \varepsilon] + C_8 [y_1(\xi_c) + \lambda y_4(\xi_c) \varepsilon] \} &= \\
= C_9 [y_2(\xi_c) + \lambda y_1(\xi_c) \varepsilon] + C_{10} [y_3(\xi_c) + \lambda y_2(\xi_c) \varepsilon] + \\
+ C_{11} [y_4(\xi_c) + \lambda y_3(\xi_c) \varepsilon] + C_{12} [y_1(\xi_c) + \lambda y_4(\xi_c) \varepsilon],
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Для того, чтобы $C_3 \div C_{12}$ не были равны нулю одновременно, необходимо, чтобы следующий определитель основной матрицы был равен нулю. Это условие дает частотное уравнение, которое здесь не приводится. Из полученного частотного уравнения по трем собственным частотам можно определить координату надреза ξ_c , параметры надреза m и ε . Расчеты и эксперименты проведены для следующих параметров образца: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho = 7800$ кг/м³, $L = 200$ мм, диаметр образца $D = 10$ мм, $x_c = 15$ мм, $l = 1$ мм, диаметр образца в зоне надреза d – переменная величина (рис. 1). Для образца круглого поперечного сечения

$$\lambda^4 = \lambda^*{}^4 L^4 = \frac{16\rho\omega^2 L^4}{ED^2} = \frac{16L^2\Omega^2}{D^2}.$$

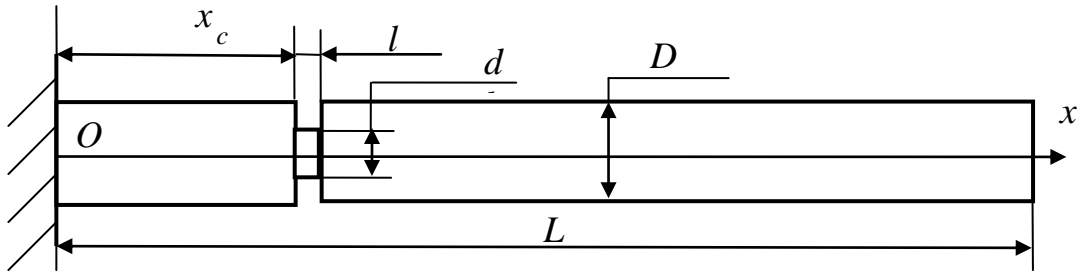


Рис. 1

При этом вычисленные значения первой, второй и третьей собственных частот балки без надреза $f_1 = 177.1000$ Гц, $f_2 = 1109.8668$ Гц, $f_3 = 3107.6592$ Гц. Для балки с надрезом при $x_c = 50$ мм, $l = 0.01$ м, $m=0.5$ решение прямой задачи дает, что собственные частоты продольных колебаний балки $f_1 = 176.354986$ Гц, $f_2 = 1110.634708$ Гц, $f_3 = 3105.434516$ Гц.

Прямая задача. На рис. 2. даются зависимости первой собственной частоты изгибных колебаний от диаметра поперечного сечения в зоне надреза d для различных значений координаты надреза $x_c = 0$ мм (кривая - 1), $x_c = 15$ мм (кривая - 2), $x_c = 30$ мм (кривая - 3). Видно, что с ростом координаты надреза x_c происходит увеличение первой собственной частоты изгибных колебаний.

На рис. 3. даются зависимости первой собственной частоты изгибных колебаний от длины надреза l для различных значений координаты надреза $x_c = 0$ мм (кривая - 1), $x_c = 15$ мм (кривая - 2), $x_c = 30$ мм (кривая - 3) при диаметре поперечного сечения в зоне надреза $d = 4$ мм. Также видно, что с увеличением длины надреза l происходит уменьшение первой собственной частоты изгибных колебаний, а с ростом координаты надреза x_c происходит увеличение первой собственной частоты изгибных колебаний.

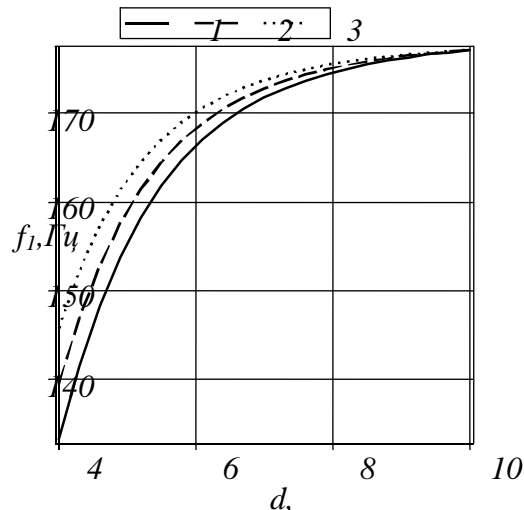


Рис. 2.

На рис. 4. даются зависимости первой собственной частоты изгибных колебаний от координаты надреза x_c для различных значений длины надреза $l = 0$ мм (кривая - 1), $l = 1$ мм (кривая - 2), $l = 2$ мм (кривая - 3) при диаметре поперечного сечения в зоне надреза $d = 4$ мм.

Видно, что с увеличением координаты надреза x_c происходит увеличение первой собственной частоты изгибных колебаний.

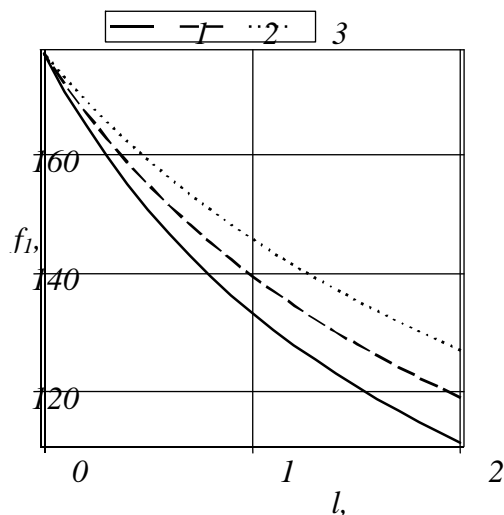


Рис. 3.

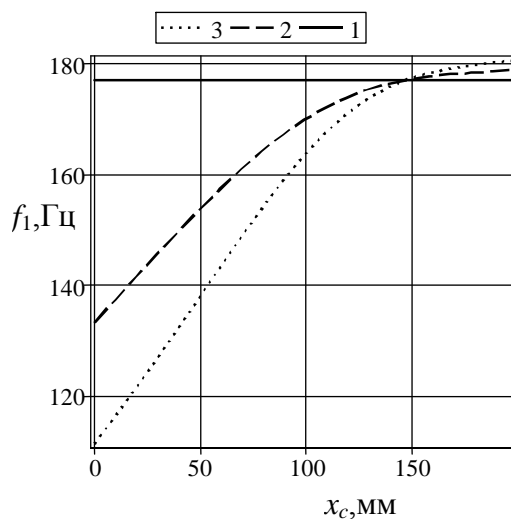


Рис. 4.

Обратная задача. На рис. 5-7 приводятся зависимости координаты надреза x_c , его длины l и диаметра поперечного сечения в зоне надреза d от первой частот собственных изгибных колебаний балки f_1 , для $f_2 = 1110.634$ Гц (линия 1), $f_2 = 1110.602$ Гц (линия 2), $f_2 = 1110.570$ Гц (линия 3), $f_3 = 3105.434$ Гц.

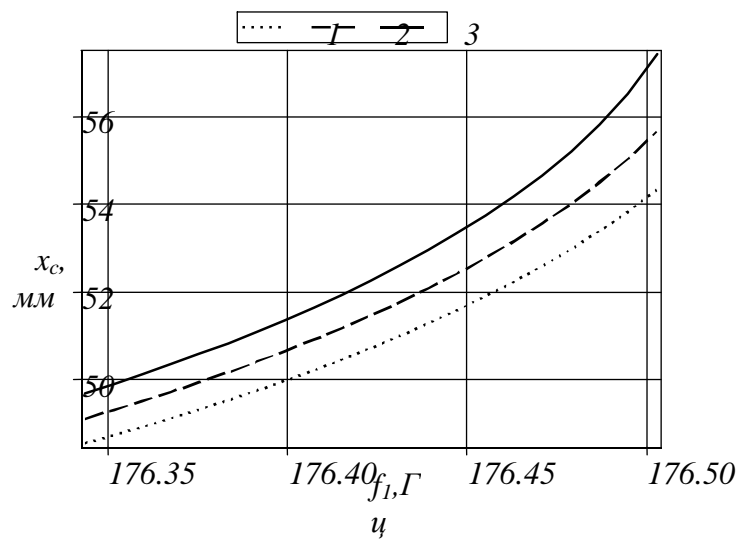


Рис. 5.

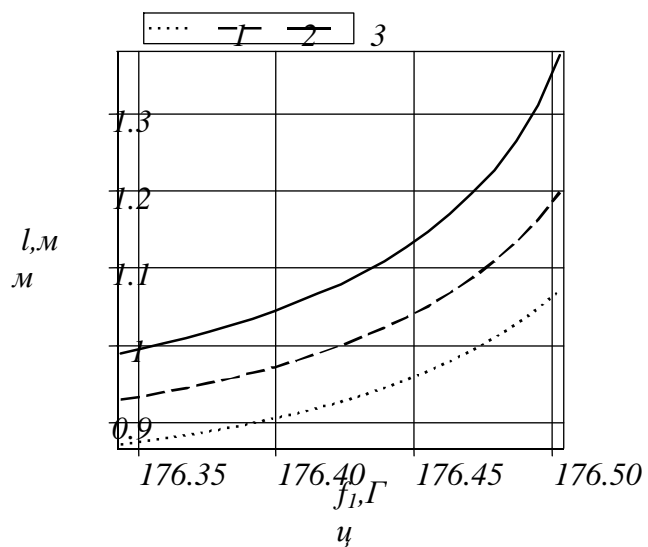


Рис. 6.

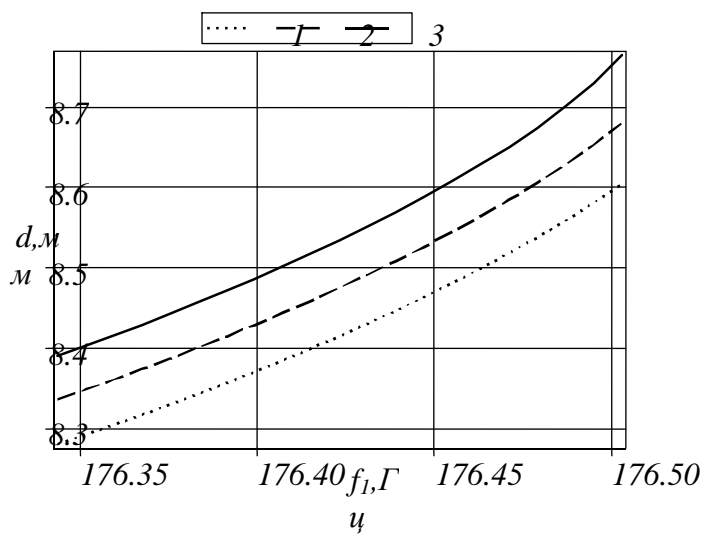


Рис. 7.

Проведенные исследования показывают, что по трем частотам свободных изгибных колебаний определяются координата надреза x_c , его длина l и диаметр поперечного сечения в зоне надреза d . Например, для собственных частот балки $f_1 = 176.354986$ Гц, $f_2 = 1110.634708$ Гц, $f_3 = 3105.434516$ Гц координата надреза $x_c = 50$ мм, длина надреза $l = 1$ мм, диаметр поперечного сечения в зоне надреза $d = 8.408$ мм.

2. Крутильные колебания. Рассматривается напряженно-деформированное вала, закрепленного верхним концом на упругой опоре с коэффициентом жесткости на кручение c_1 (рис. 8). Предполагается, что на валу имеется короткий участок (по сравнению с общей ее длиной) с меньшей площадью поперечного сечения. Этот надрез моделирует ее повреждение, в частности, повреждение, типа раскрытой трещины. Задача состоит в определении координаты надреза и его размеров в приближении гипотезы плоских сечений.

Обозначим через L, J_p длину и полярный момент инерции поперечного сечения вала, G, ρ, μ – модуль сдвига, плотность и коэффициент внутреннего трения, через l, \tilde{J}_p – длину и полярный момент инерции поперечного сечения надреза, x_c – его координату, φ, M – угол поворота и крутящий момент в сечении вала. Между крутящим моментом M и относительным углом закручивания θ принимается следующая зависимость

$$M = GJ_p \theta, \quad \theta = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

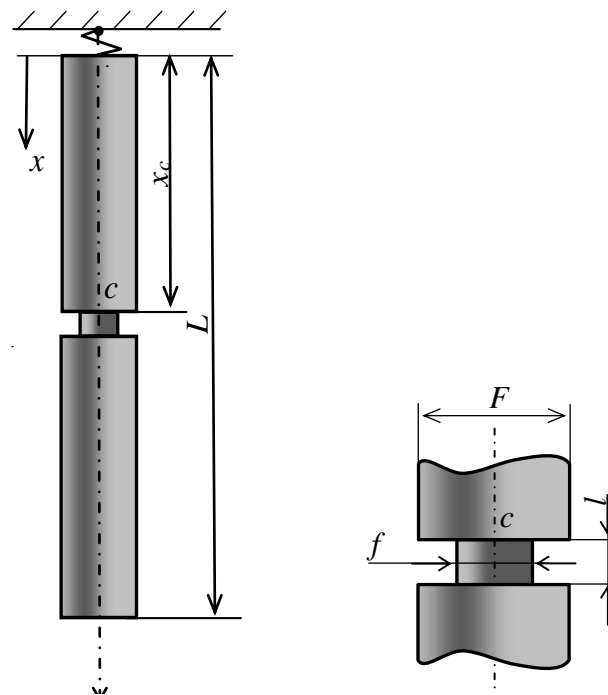


Рис. 8

В соответствии со сказанным имеем

$$G \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad M = GJ_p \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Отсчитывая координату x от точки крепления, запишем граничные условия

$$M = c_1 \varphi \quad (x = 0), \quad M = 0 \quad (x = L).$$

В пределах надреза с короткой длиной l и вблизи него имеется сложное пространственное напряженно-деформированное состояние [17]. Рассматриваем динамическую задачу

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\rho}{G} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad M = GJ_p \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (2.1)$$

$$M = c_1 \varphi (x=0), \quad M = 0 (x=L), \quad (2.2)$$

Обозначая функции в областях $0 \leq x \leq x_c$, $x_c \leq x \leq x_c + l$, $x_c + l \leq x \leq L$ индексами «1», «2», «3», соответственно, запишем условия стыкования решений при $x = x_c$ и $x = x_c + l$ (условия равенства усилий и углов поворота)

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = m \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad (x = x_c), \quad (2.3)$$

$$m \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}, \quad \varphi_2 = \varphi_3, \quad (x = x_c + l), \quad n = \frac{\tilde{J}_p}{J_p}. \quad (2.4)$$

Таким образом, в приведенной простейшей модели надреза фигурируют его координата x_c , длина надреза l и параметр n . В прямой задаче координата надреза x_c , его длина l и параметр n известны, в обратной задаче необходимо определить эти величины.

Частное решение задачи (2.1) имеет вид

$$\varphi = (A \cos \alpha x + B \sin \alpha x) \sin \omega t \quad (\alpha = \omega/a_1, a_1^2 = G/\rho).$$

Шесть констант в этом решении, записанном для областей $0 \leq x \leq x_c$, $x_c \leq x \leq x_{cl}$ и $x_{cl} \leq x \leq L$, ($x_{cl} = x_c + l$) определяются из шести граничных условий (2.2)-(2.4). Для того, чтобы $A_i, B_i (i = 1 \div 3)$ не были равны нулю одновременно, необходимо, чтобы следующий определитель равнялся нулю

$$\det(a_{ij}) = 0, \quad (2.5)$$

где ненулевые элементы определителя записываются в виде

$$a_{11} = c_1, a_{12} = -GJ_p \alpha, a_{25} = \sin(\alpha L), a_{26} = -\cos(\alpha L),$$

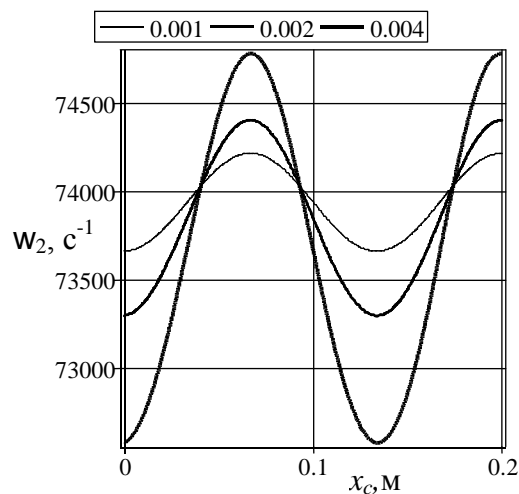
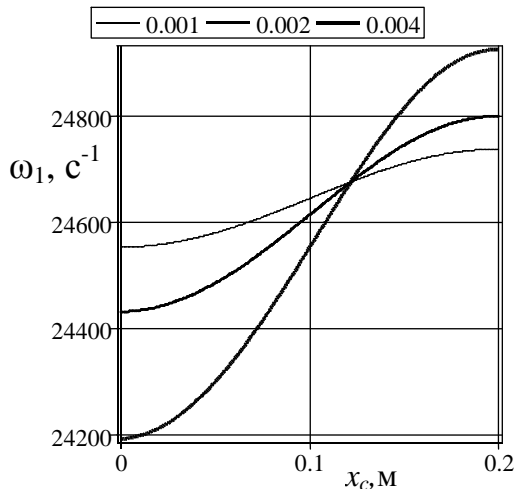
$$a_{31} = \sin(\alpha x_c), a_{32} = -\cos(\alpha x_c), a_{33} = -n \sin(\alpha x_c), a_{34} = n \cos(\alpha x_c),$$

$$a_{41} = \cos(\alpha x_c), a_{42} = \sin(\alpha x_c), a_{43} = -\cos(\alpha x_c), a_{44} = -\sin(\alpha x_c),$$

$$a_{53} = n \sin(\alpha x_{cl}), a_{54} = -n \cos(\alpha x_{cl}), a_{55} = -\sin(\alpha x_{cl}), a_{56} = \cos(\alpha x_{cl}),$$

$$a_{63} = \cos(\alpha x_{cl}), a_{64} = \sin(\alpha x_{cl}), a_{65} = -\cos(\alpha x_{cl}), a_{66} = -\sin(\alpha x_{cl}).$$

Условие (2.5) дает частотное уравнение, которое здесь не приводится из-за его громоздкости.



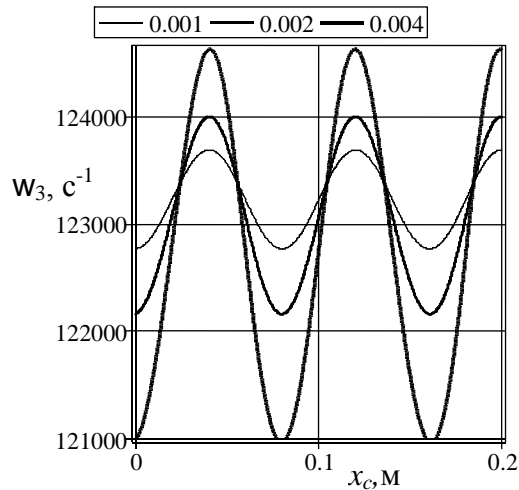


Рис. 9. Зависимости круговых частот крутильных колебаний вала $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ от координаты надреза x_c для параметра $n = 0.5$ и различных l (в м).

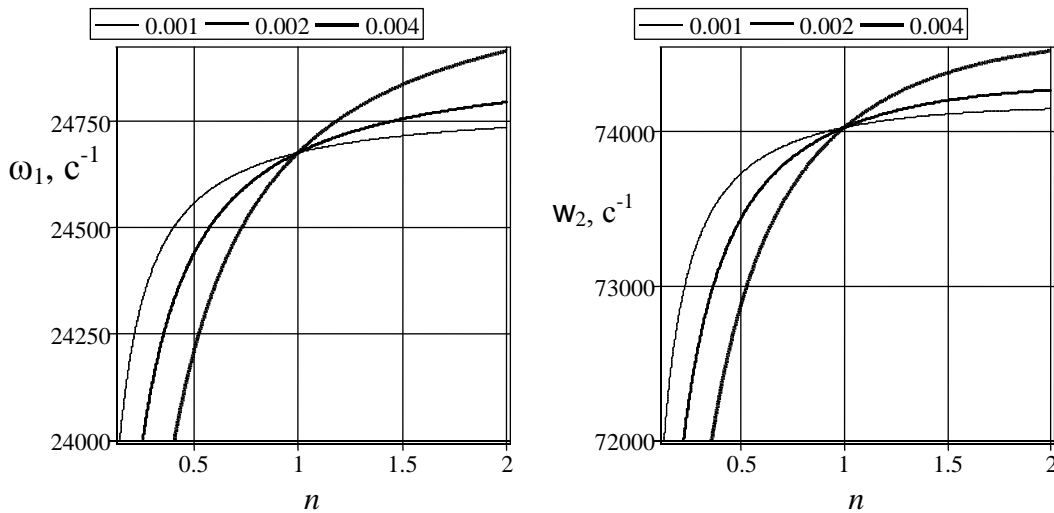
Когда коэффициент жесткости на кручение $c_1 \rightarrow \infty$, тогда частотное уравнение упрощается. Дополнительно, применяя следующие соотношения для малых αl :

$$\sin(\alpha x_{cl}) = \sin(\alpha x_c) + \alpha l \cos(\alpha x_c), \quad \cos(\alpha x_{cl}) = \cos(\alpha x_c) - \alpha l \sin(\alpha x_c)$$

и пренебрегая $(\alpha l)^2$, получим

$$n^2 \left(-\sin(\alpha L) + \sin(\alpha L) \cos^2(\alpha x_c) - \cos(\alpha L) \sin(\alpha L) \cos(\alpha x_c) \right) + n \left(\sin(\alpha L) + \frac{\cos(\alpha L)}{\alpha l} \right) + \sin(\alpha x_c) \cos(\alpha x_c) \cos(\alpha L) - \sin(\alpha L) \cos^2(\alpha x_c) = 0. \quad (2.6)$$

Для вала без надреза ($\alpha l = 0$) из уравнения (2.6) следует, что $\cos \alpha L = 0$, а собственные частоты равны [7] $\alpha L = (2k - 1)\pi/2$ ($k = 1, 2, \dots$) или $\omega_k = (2k - 1)\pi a/2L$.



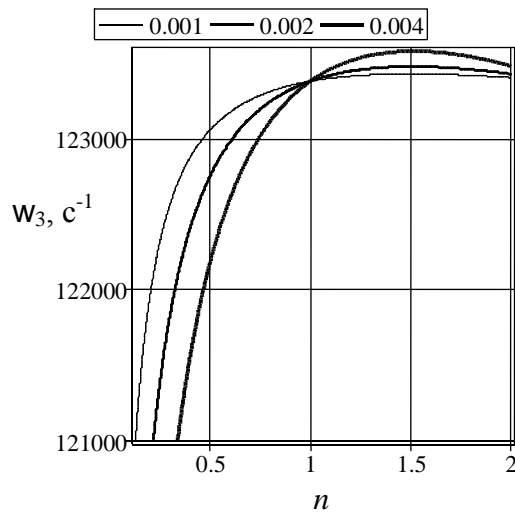
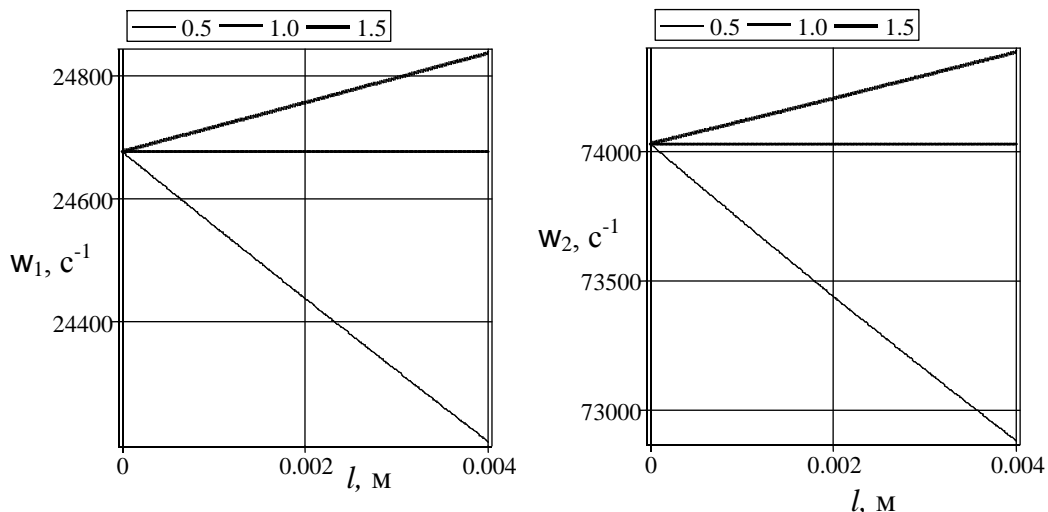


Рис. 10. Зависимости круговых частот крутильных колебаний вала ω_1 , ω_2 , ω_3 от параметра n для координаты надреза $x_c = 15$ мм и различных l (в м).

Для определения n , l и x_c необходимо провести анализ собственных частот крутильных колебаний вала с надрезом.

Прямая задача. Решение уравнения (2.6) проведено численно для следующих параметров системы: $G = 0.77 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho = 7800$ кг/м³, $a_1 = 3141.9$ м/с. $L = 0.2$ м, $J_p = 9.817 \cdot 10^{-10}$ м² (диаметр вала 10 мм), $C_1 \rightarrow \infty$. При этом первая, вторая и третья собственные частоты вала без надреза $\omega_1 = 24676.74931$ рад/с, $\omega_2 = 74030.24790$ рад/с, $\omega_3 = 123323.7466$ рад/с. Для вала с надрезом при $x_c = 50$ мм, $m=0.5$, $l = 0.001$ м решение прямой задачи дает, что круговые частоты продольных колебаний вала $\omega_1 = 24581.04114$ рад/с, $\omega_2 = 74133.51169$ рад/с, $\omega_3 = 123558.7641$ рад/с. На рис. 9 приводятся зависимости круговых частот крутильных колебаний вала ω_1 , ω_2 , ω_3 от координаты надреза x_c для параметра $m=0.5$ и различных l (в м). Эти зависимости имеют периодический характер. На рис. 10 приводятся зависимости круговых частот крутильных колебаний вала ω_1 , ω_2 , ω_3 от параметра n для координаты надреза $x_c = 15$ мм и различных l (в м). На рис. 11 приводятся зависимости круговых частот крутильных колебаний вала ω_1 , ω_2 , ω_3 от от длины надреза l для координаты надреза $x_c = 15$ мм и различных значений параметра n . Эти зависимости в рассматриваемом диапазоне изменения длины надреза l имеют линейный характер.



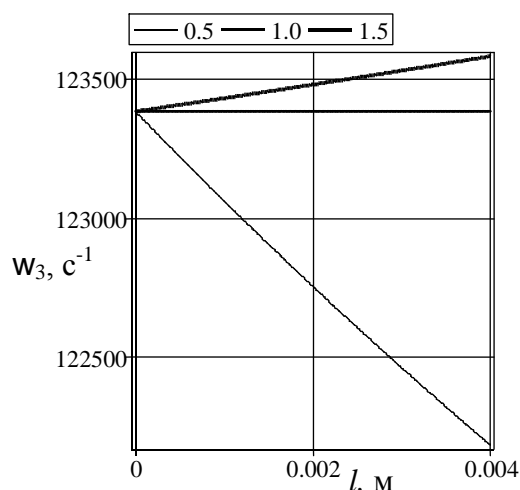


Рис. 11. Зависимости круговых частот крутильных колебаний вала ω_1 , ω_2 , ω_3 от длины надреза l для координаты надреза $x_c = 15$ мм и различных значений параметра n .

Обратная задача. Если частотное уравнение (2.6) записать для трех частот свободных крутильных колебаний, то из полученной системы уравнений определяются координата надреза x_c , его длина l и параметр n . Например, для круговых частот крутильных колебаний вала $\omega_1 = 24581.04114$ рад/с, $\omega_2 = 74133.51169$ рад/с, $\omega_3 = 123558.7641$ рад/с решение обратной задачи дает, что вал имеет надрез при $x_c = 50$ мм, $n=0.5$, $l = 0.001$ м, а для $\omega_1 = 24500.0$ рад/с, $\omega_2 = 74120.0$ рад/с, $\omega_3 = 123500.0$ рад/с - $x_c = 50.5$ мм, $n = 0.316$, $l = 0.37$ мм.

На рис. 12 приводятся зависимости координаты надреза x_c , его длины l и диаметр поперечного сечения в зоне надреза d от круговых частот крутильных колебаний вала ω_1 , для $\omega_2 = 74140$ рад/с (линия 3), $\omega_2 = 74150$ рад/с (линия 2), $\omega_2 = 74160$ рад/с (линия 1), $\omega_3 = 123550$ рад/с.

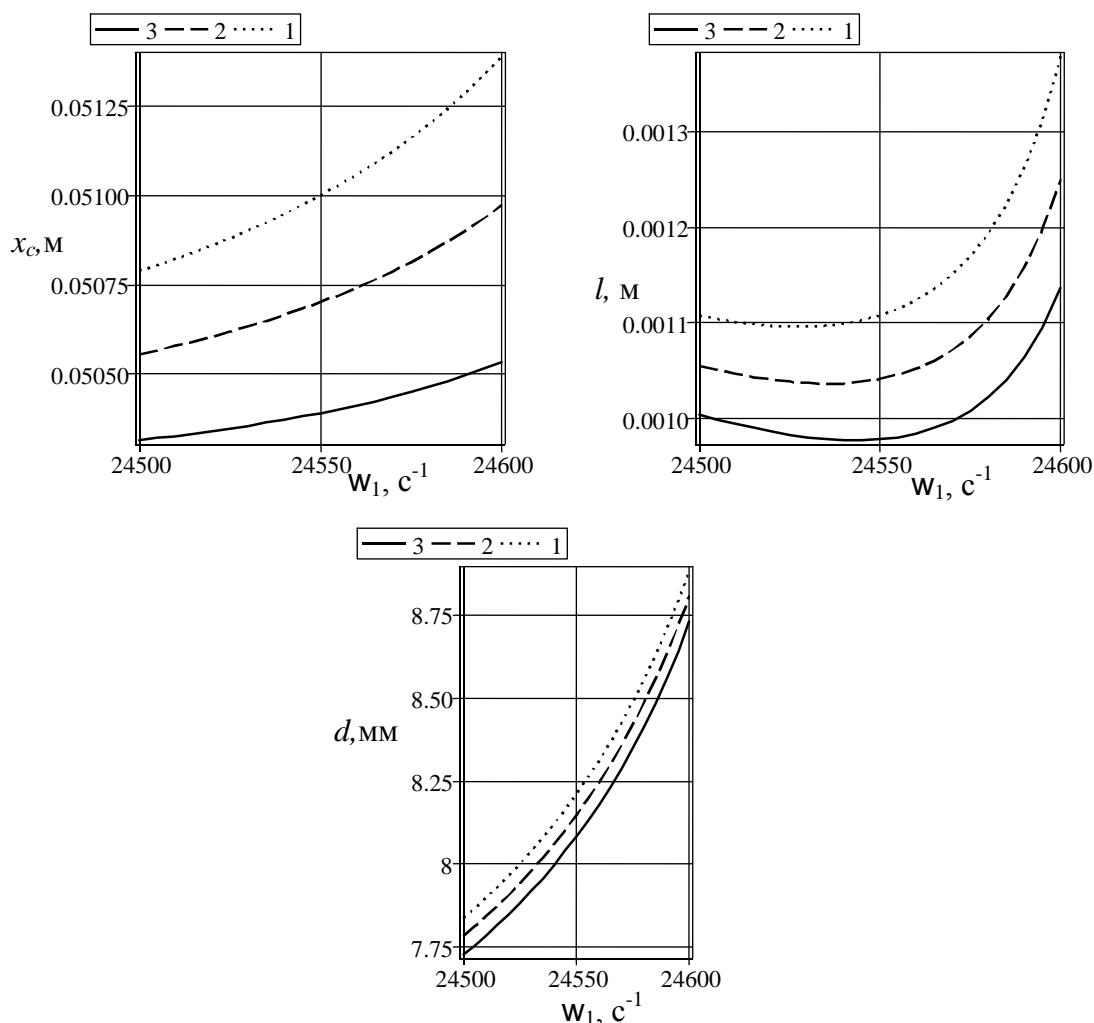


Рис. 12. Зависимости координаты надреза x_c , его длины l и диаметр поперечного сечения в зоне надреза d от круговой частоты крутильных колебаний вала ω_1 .

Проведенные исследования показывают, что по трем частотам свободных крутильных колебаний можно определить координату надреза x_c , его длину l и диаметр поперечного сечения в зоне надреза d .

3. Продольные колебания. Рассматривается напряженно - деформированное состояние стержня, закрепленного верхним концом на упругом подвесе жесткостью c_2 и растянутым под действием собственного веса (рис. 8). Предполагается, что в стержне имеется короткий участок (по сравнению с общей ее длиной) с меньшей площадью поперечного сечения. Этот надрез не приводит к изгибу стержня и моделирует ее повреждение, в частности, повреждение, типа раскрытой трещины. Необходимо определить координату надреза и его размеры в приближении гипотезы плоских сечений.

Обозначим через L, F длину и площадь поперечного сечения стержня, E, ρ, μ - модуль упругости, плотность и коэффициент внутреннего трения, через l, f - длину и площадь поперечного сечения надреза, x_c - его координату, u, T - перемещение и сила натяжения стержня. Между напряжением σ и деформацией ε принимается следующая зависимость

$$\sigma = E \left(\varepsilon + \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right), \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

В соответствии со сказанным имеем

$$E \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad T = EF \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right).$$

Отсчитывая координату x от точки крепления, запишем граничные условия

$$T = c_1 u \quad (x=0), \quad T = 0 \quad (x=L).$$

В пределах надреза с короткой длиной l и вблизи него имеется сложное пространственное напряженно-деформированное состояние [17]. Однако здесь для простоты принимаем одноосное растяжение – сжатие. Рассматриваем динамическую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad T = EF \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right), \quad (3.1)$$

$$T = c_1 u \quad (x=0), \quad T = 0 \quad (x=L), \quad (3.2)$$

Обозначая функции в областях $0 \leq x \leq x_c$, $x_c \leq x \leq x_c + l$, $x_c + l \leq x \leq L$ индексами «1», «2», «3», соответственно, запишем условия стыкования решений при $x = x_c$ и $x = x_c + l$ (условия равенства усилий и перемещений) [9]

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} = q \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial t} \right), \quad u_1 = u_2, \quad (x = x_c), \quad (3.3)$$

$$m \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial t} \right) = \frac{\partial u_3}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial t}, \quad u_2 = u_3, \quad (x = x_c + l), \quad q = \frac{f}{F}. \quad (3.4)$$

Условия вида (3.3)-(3.4) приводятся также в статье [18], где предложена универсальная процедура обработки данных разрезного стержня Гопкинсона [19].

Таким образом, в приведенной простейшей модели надреза фигурируют его координата x_c , длина надреза l и параметр q . В прямой задаче координата надреза x_c , его длина l и параметр q известны, в обратной задаче необходимо определить эти величины.

Частное решение задачи (3.1) при $\mu = 0$ имеет вид

$$u = (A \cos \alpha x + B \sin \alpha x) \sin \omega t \quad (\alpha = \omega/a, a^2 = E/\rho).$$

Шесть констант в этом решении, записанном для областей $0 \leq x \leq x_c$, $x_c \leq x \leq x_{cl}$ и $x_{cl} \leq x \leq L$, ($x_{cl} = x_c + l$) определяются из шести граничных условий (3.2)-(3.4). Для того, чтобы A_i, B_i ($i = 1 \div 3$) не были равны нулю одновременно, необходимо, чтобы следующий определитель равнялся нулю

$$\det(a_{ij}) = 0, \quad (3.5)$$

где ненулевые элементы определителя записываются в виде

$$a_{11} = c_2, a_{12} = -EF\alpha, a_{25} = \sin(\alpha L), a_{26} = -\cos(\alpha L),$$

$$a_{31} = \sin(\alpha x_c), a_{32} = -\cos(\alpha x_c), a_{33} = -q \sin(\alpha x_c), a_{34} = q \cos(\alpha x_c),$$

$$a_{41} = \cos(\alpha x_c), a_{42} = \sin(\alpha x_c), a_{43} = -\cos(\alpha x_c), a_{44} = -\sin(\alpha x_c),$$

$$a_{53} = q \sin(\alpha x_{cl}), a_{54} = -q \cos(\alpha x_{cl}), a_{55} = -\sin(\alpha x_{cl}), a_{56} = \cos(\alpha x_{cl}),$$

$$a_{63} = \cos(\alpha x_{cl}), a_{64} = \sin(\alpha x_{cl}), a_{65} = -\cos(\alpha x_{cl}), a_{66} = -\sin(\alpha x_{cl}).$$

Условие (3.5) дает частотное уравнение, которое здесь не приводится из-за его громоздкости.

Когда коэффициент $c_2 \rightarrow \infty$, тогда частотное уравнение упрощается. Применяя следующие соотношения при малых αl :

$$\sin(\alpha x_{cl}) = \sin(\alpha x_c) + \alpha l \cos(\alpha x_c), \quad \cos(\alpha x_{cl}) = \cos(\alpha x_c) - \alpha l \sin(\alpha x_c)$$

и пренебрегая $(\alpha l)^2$, получим

$$\begin{aligned}
& q^2 \left(-\sin(\alpha L) + \sin(\alpha L) \cos^2(\alpha x_c) - \cos(\alpha L) \sin(\alpha L) \cos(\alpha x_c) \right) + \\
& + q \left(\sin(\alpha L) + \frac{\cos(\alpha L)}{\alpha l} \right) + \sin(\alpha x_c) \cos(\alpha x_c) \cos(\alpha L) - \\
& - \sin(\alpha L) \cos^2(\alpha x_c) = 0.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Для стержня без надреза ($\alpha l = 0$) из уравнения (3.6) следует, что $\cos \alpha L = 0$, а собственные частоты равны [7] $\alpha L = (2k-1)\pi/2$ ($k = 1, 2, \dots$) или $\omega_k = (2k-1)\pi a/2L$.

Для определения q , l и x_c необходимо провести анализ собственных частот продольных колебаний стержня с надрезом.

Прямая задача. Решение уравнения (3.6) проведено численно для следующих параметров системы: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho = 7800$ кг/м³, $L = 200$ мм, диаметр образца $D = 10$ мм, $x_c = 15$ мм, $l = 1$ мм, $c_2 \rightarrow \infty$. Скорость звука $a = 5063.6$ м/с. При этом первая, вторая и третья собственные частоты стержня без надреза $\omega_1 = 39770.18252$ рад/с, $\omega_2 = 119310.5476$ рад/с, $\omega_3 = 198850.9126$ рад/с. Для стержня с надрезом при $x_c = 50$ мм, $q=0.707$, $l = 1$ мм решение прямой задачи дает, что круговые частоты продольных колебаний стержня $\omega_1 = 39708.53003$ рад/с, $\omega_2 = 119423.3073$ рад/с, $\omega_3 = 199040.3335$ рад/с. На рис. 13 приводятся зависимости круговых частот продольных колебаний стержня ω_1 , ω_2 , ω_3 от координаты надреза x_c для параметра $q=0.707$ и различных l (в м). Эти зависимости имеют периодический характер.

Обратная задача. На рис. 14 приводятся зависимости параметра q от круговых частот продольных колебаний стержня ω_1 , ω_2 , ω_3 для координаты надреза $x_c=15$ мм и различных l (в м).

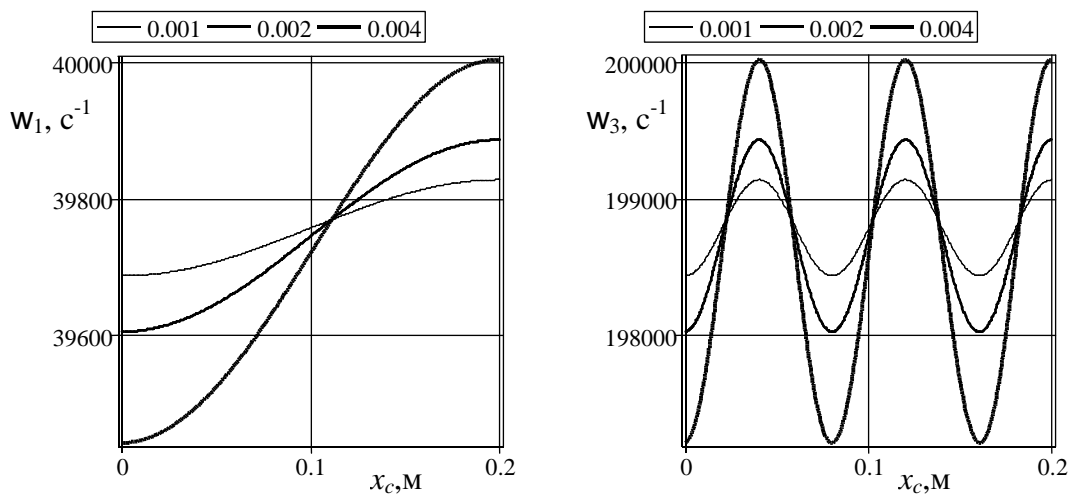


Рис. 13. Зависимости круговых частот продольных колебаний стержня ω_1 , ω_3 от координаты надреза x_c для параметра $q=0.707$ и различных l (в м).

Если частотное уравнение (3.6) записать для трех частот свободных продольных колебаний, то из полученной системы уравнений определяются координата надреза x_c , его длина l и параметр q . Например, для круговых частот продольных колебаний стержня $\omega_1 = 39708.53003$ рад/с, $\omega_2 = 119423.3073$ рад/с, $\omega_3 = 199040.3335$ рад/с решение обратной задачи дает, что стержень имеет надрез при $x_c = 50$ мм, $q=0.707$, $l = 1$ мм, а для $\omega_1 = 39700$ рад/с, $\omega_2 = 119420$ рад/с, $\omega_3 = 199030$ рад/с решение обратной задачи дает, что стержень имеет надрез при $x_c = 50.14$ мм, $q=0.629$, $l = 0.79$ мм. Данное решение является единственным в

рассматриваемой области, что видно из графика на рис. 15, так как имеется только одна точка пересечения всех трех кривых, x_c , 1 в м для $\omega_1 = 39700$ рад/с, $\omega_2 = 119420$ рад/с, $\omega_3 = 199030$ рад/с.

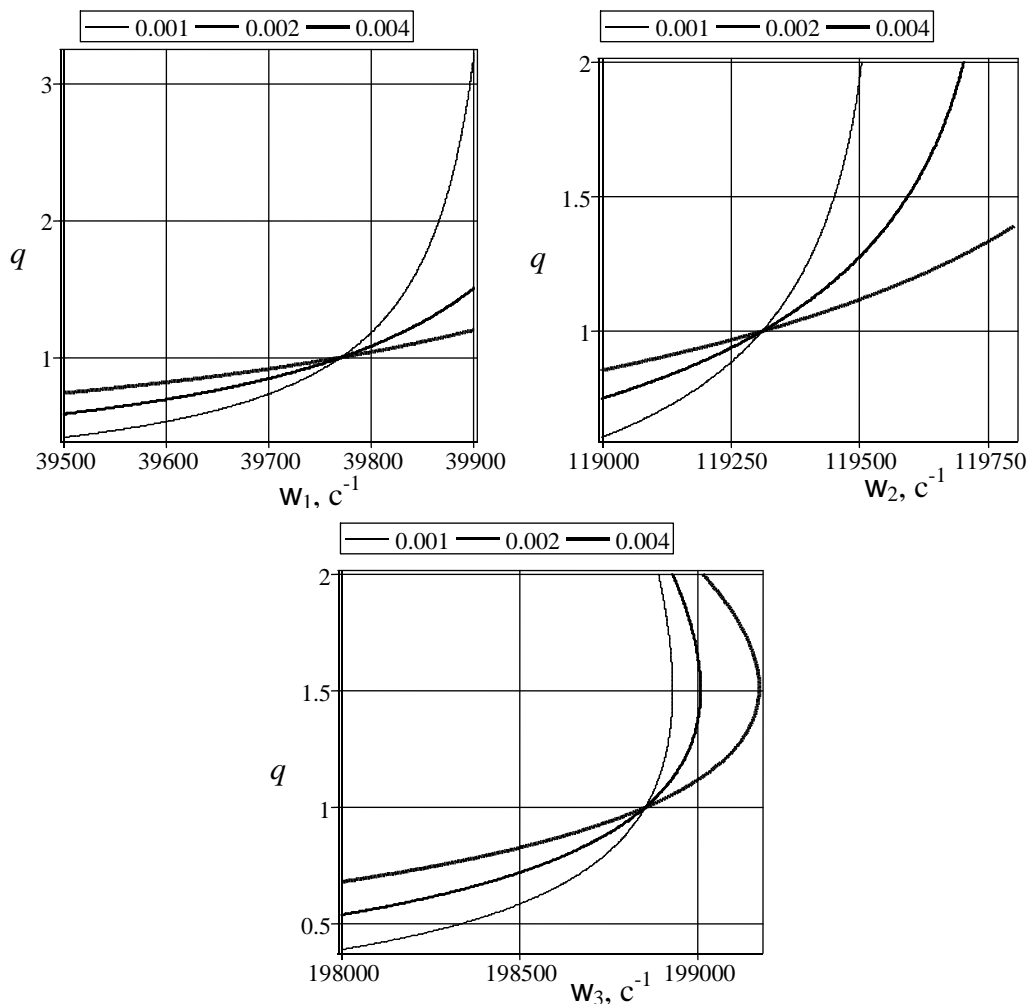


Рис. 14. Зависимости параметра q от круговых частот продольных колебаний стержня $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ для координаты надреза $x_c = 15$ мм и различных l (в м).

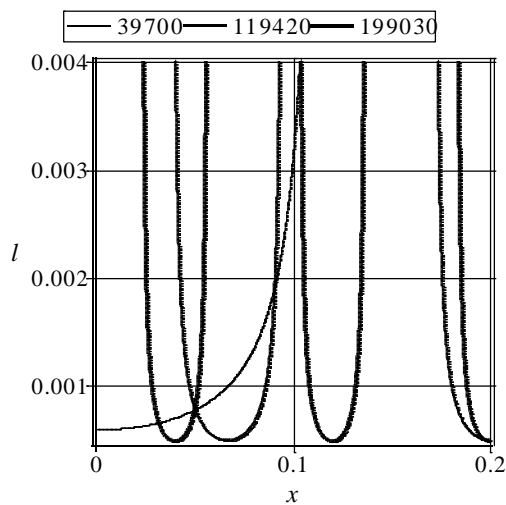


Рис. 15.

На рис. 16 приводятся зависимости координаты надреза x_c , его длины l и параметра q от круговых частот продольных колебаний стержня ω_1 , для $\omega_2 = 119390$ рад/с (линия 1), $\omega_2 = 119400$ рад/с (линия 2), $\omega_2 = 119410$ рад/с (линия 3), $\omega_3 = 199040$ рад/с.

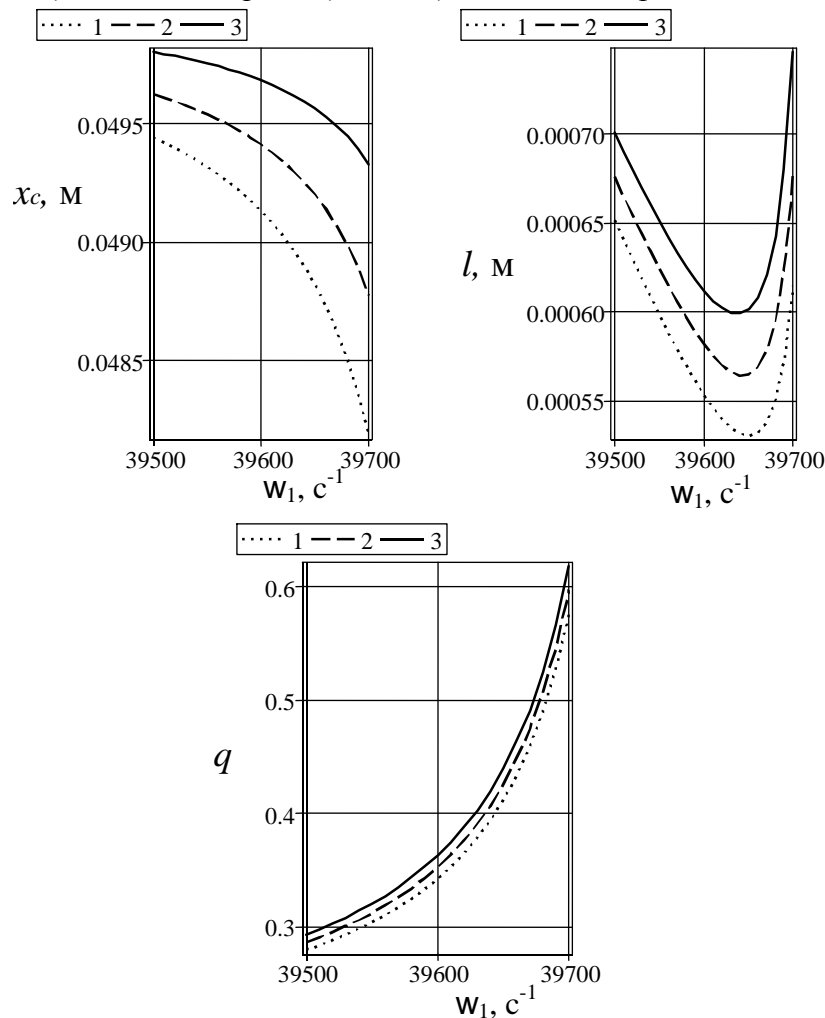


Рис. 16. Зависимости координаты надреза x_c , его длины l и параметра q от круговой частоты продольных колебаний стержня ω_1 .

Проведенные исследования показывают, что по трем частотам свободных продольных колебаний можно определить координату надреза x_c , его длину l и параметр надреза q .

Если стержень имеет единственное повреждение типа поперечной раскрытой трещины, то для определения его координаты x_c , длины l и параметров повреждения m или n или q могут быть использованы три низшие частоты изгибных или крутильных или продольных колебаний. По этим параметрам определяются осевой момент инерции, полярный момент инерции, площадь поперечного сечения единственного повреждения.

Литература

1. Gladwell G. M. L. Inverse problems in vibration. –Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2004. (Русский перевод: Глэдвелл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний. – М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. С.608.
2. Ильгамов М.А. Диагностика повреждений вертикальной штанги // Труды института механики УНЦ РАН. Вып. 5. – Уфа: «Гилем». 2007. С.201-211.

3. *Ватульян А. О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит. 2007. С.224.
4. *Ватульян А. О., Солуянов Н. О.* Об определении местоположения и размера полости в упругом стержне. // Дефектоскопия. 2005. №9. С.44-56. *Киренков И.И.* Метрологические основы оптической пирометрии. М.: Изд-во стандартов, 1976.
5. *Хакимов А.Г.* Диагностика повреждений вертикальной штанги на упругой подвеске. // Электронный научный журнал "Нефтегазовое дело", 2010. URL: <http://www.ogbus.ru/authors/Khakimov/Khakimov1.pdf>.
6. *Ilgamov M.A., Sultanov B.Z., Tazhitdinov A.N., Khakimov A.G.* Damage diagnostics in a vertical bar hanged on the elastic suspender with concentrated mass / Abstracts. 10th European Conference on Non-Destructive Testing. Moscow. Part 1. - М.: Publishing house Spektr, 2010. - P. 345-347.
7. *Khakimov A.G.* Damage Diagnostics in a Vertical Rod with Concentrated Masses on the Elastic Suspender // International Journal of Mechanics and Applications. 2012. Vol.2, No.5, P. 70-73.
8. *Ахметвалиева Э.Н., Ахтямов А.М.* Диагностика поперечного надреза вертикальной штанги // Контроль. Диагностика. 2012. № 8. С. 31-34.
9. *Хакимов А.Г.* О собственных колебаниях вала с моделью искусственного дефекта // Дефектоскопия. 2010. Т. 46. № 6. С. 93-98.
10. *Сафина Г.Ф.* Исследование по крутильным колебаниям вала с дисками // Дефектоскопия. 2011. Том 47. № 3. С. 51-65.
11. *Хакимов А.Г.* О собственных колебаниях вала турбокомпрессора с искусственным дефектом // ИВУЗ. Авиационная техника. 2011. № 1. С. 71-73.
12. *Ильгамов М.А., Хакимов А.Г.* Диагностика повреждений консольной балки с надрезом // Дефектоскопия. 2009. Том 45. № 6. С. 83-89.
13. *Ильгамов М.А., Хакимов А.Г.* Диагностика повреждений балки на шарнирных опорах // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2010. № 2. С. 42-48.
14. *Guangming Dong and Jin Chen.* Vibration analysis and crack identification of a rotor with open cracks // Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 2011, Vol. 28, No. 1, P. 171-182.
15. *Акопьян В.А., Черпаков А.В., Рожков Е.В., Соловьев А.Н.* Интегральный диагностический признак идентификации повреждений в элементах стержневых конструкций // Контроль. Диагностика. 2012. № 7. С. 50-56.
16. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 3. Под общей редакцией И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968, 568 с.
17. *Партон В.З., Морозов Е.М.* Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1974. – 450 с.
18. *Лопатников С.Л., Гама Б.А., Краутхаузер К., Джиллесси Дж. Мл.* О применимости классического анализа опытов с разрезным стержнем Гопкинсона // Письма в ЖТФ, 2004. Т.30. Вып. 3. С. 39-46.
19. *Kolsky H.* An investigation of mechanical properties of materials at very high rates of loading // Proc. Phys. Soc. Lond. 1949. V. 62 (II-B). P.676–700.