АНАЛОГ ФОРМУЛ КИРХГОФА ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

Ильинский А. С., Ефимова И. Г.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва

irina.efimova@mail.ru

Во временной области получено интегральное представление для векторов напряженностей нестационарного электромагнитного поля в проводящей среде. Поле в произвольный момент времени в любой точке замкнутого объема представлено в виде суммы интегралов по объему и по поверхности, ограничивающей этот объем. Подынтегральные функции содержат напряженности полей и сторонние токи, а также их производные по времени в моменты, предшествующие моменту наблюдения.

В соответствии с известной теоремой эквивалентности монохроматическое электромагнитное поле в однородной изотропной среде может быть выражено в интегральной форме через значения векторов напряженностей электрического и магнитного полей на замкнутой поверхности [1--4]. Интегральные представления в частотной области для напряженностей электрического и магнитного полей, называемые формулами Стрэттона-Чу и справедливые при любых значениях материальных параметров среды, были получены и подробно проанализированы в [1, 4]. Эти представления широко используются для составления частотных интегральных уравнений, которые применяются для решения разнообразных электродинамических задач [2, 4--7].

Во временной области электромагнитное поле, существующее в непроводящей среде, также может быть представлено в интегральной форме через значения напряженностей электрического и магнитного полей на замкнутой поверхности. В этом случае напряженности полей, входящие в подынтегральные выражения, являются функциями от запаздывающего временного аргумента. Такое представление было получено в скалярной [1] и векторной [2] формах и успешно применяется для составления временных интегральных уравнений, используемых в численных исследованиях рассеяния нестационарного электромагнитного поля на идеально проводящих телах и диэлектрических телах без потерь, расположенных в непроводящей среде [2, 8, 9]. Вопросы существования и единственности решения временных интегральных уравнений для тока, наведенного на поверхности идеально проводящего рассеивателя, рассматривались в [10, 11]. Однако до последнего времени метод временных интегральных уравнений не был разработан для случая проводящей среды, поскольку не было получено интегральное представление нестационарного электромагнитного поля в такой среде. В книге [1] отмечено, что при применении метода Кирхгофа интегрирования неоднородного волнового уравнения наличие проводимости среды приводит к значительным аналитическим трудностям.

В настоящей работе получено временное интегральное представление нестационарного электромагнитного поля в однородной изотропной среде, обладающей проводимостью.

Будем рассматривать однородную изотропную среду с материальными параметрами, не зависящими ни от времени, ни от пространственных координат. В этом случае уравнения Максвелла имеют вид

$$rot\vec{E} + \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\vec{j}^{mext} - \sigma^m \vec{H}$$

$$rot\vec{H} - \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}^{eext} + \sigma^e \vec{E} \quad , \tag{1}$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ - векторы напряженностей электрического и магнитного полей, соответственно, ε - диэлектрическая проницаемость, μ - магнитная проницаемость, σ^e - удельная электрическая проводимость, σ^m - удельная магнитная проводимость, $\vec{j}^{eext}$ и $\vec{j}^{mext}$ - объемные плотности сторонних электрического и магнитного токов, соответственно. Предполагается, что ε, μ, σ^e и σ^m являются постоянными величинами, а $\vec{E}$ и $\vec{H}$ конечными функциями непрерывными вместе со всеми своими производными во всех обыкновенных точках пространства (в которых нет резких изменений физических свойств среды).

Считаем, что сторонние токи и заряды удовлетворяют уравнениям непрерывности

$$div\vec{j}^{eext} + \frac{\partial \rho^{eext}}{\partial t} = 0,$$

$$div\vec{j}^{mext} + \frac{\partial \rho^{mext}}{\partial t} = 0, \tag{2}$$

где ρ^{eext} и ρ^{mext} объемные плотности электрического и магнитного зарядов, соответственно. Также мы предполагаем, что все функции времени, рассматриваемые в данной задаче, - напряженности электрического и магнитного полей, объемные плотности сторонних токов и зарядов - равны нулю вместе со своими производными до момента времени $t = 0$ включительно.

Из уравнений Максвелла (1) и уравнений непрерывности (2) можно получить соотношения

$$div\vec{E} = \frac{1}{a^e} \exp(-\frac{b^e}{a^e} t) \int_{t=0}^{t} \frac{\partial \rho^{eext}(t)}{\partial t} \exp(\frac{b^e}{a^e} t) dt,$$

$$div\vec{H} = \frac{1}{a^m} \exp(-\frac{b^m}{a^m} t) \int_{t=0}^{t} \frac{\partial \rho^{mext}(t)}{\partial t} \exp(\frac{b^m}{a^m} t) dt, \tag{3}$$

где

$$a^e = \varepsilon,\ b^e = \sigma^e,\ a^m = \mu,\ b^m = \sigma^m. \tag{4}$$

Уравнения (1) и (3) составляют полную систему уравнений, описывающих электромагнитное поле в однородной изотропной среде. Запишем векторные волновые уравнения для $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Имеем из первого и второго уравнений Максвелла

$$rotrot\vec{E} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial \vec{j}^{eext}}{\partial t} - \mu\sigma^e \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - rot\vec{j}^{mext} - \sigma^m rot\vec{H} \tag{5}$$

и

$$rotrot\vec{H} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\varepsilon \frac{\partial \vec{j}^{mext}}{\partial t} - \varepsilon\sigma^m \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + rot\vec{j}^{eext} + \sigma^e rot\vec{E}, \tag{6}$$

соответственно. Перепишем волновые уравнения (5) и (6) в виде

$$rotrot\vec{E} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma^e\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \sigma^m(\sigma^e\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}) =$$

$$= -\mu\frac{\partial\vec{j}^{\,eext}}{\partial t} - rot\vec{j}^{\,mext} - \sigma^m\vec{j}^{\,eext}, \qquad (7)$$

$$rotrot\vec{H} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} + \varepsilon\sigma^m\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \sigma^e(-\sigma^m\vec{H} - \mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}) =$$

$$-\varepsilon\frac{\partial\vec{j}^{\,mext}}{\partial t} + rot\vec{j}^{\,eext} - \sigma^e\vec{j}^{\,mext}. \qquad (8)$$

Далее проведем выкладки только для поля $\vec{E}$, а затем перейдем к результату для поля $\vec{H}$ по принципу двойственности [3]. В силу векторного тождества

$rotrot\vec{E} = graddiv\vec{E} - \Delta\vec{E}$

уравнение (7) можно представить в виде

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - (\mu\sigma^e + \varepsilon\sigma^m)\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \sigma^m\sigma^e\vec{E} =$$

$$= graddiv\vec{E} + \mu\frac{\partial\vec{j}^{\,eext}}{\partial t} + \sigma^m j^{eext} + rotj^{mext}, \qquad (9)$$

где $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ - скорость света.

Введем обозначения

$$a = \mu\sigma^e + \varepsilon\sigma^m,\ b = \sigma^m\sigma^e. \qquad (10)$$

Тогда волновое уравнение в формах (7) и (9) можно записать в виде

$$rotrot\vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + a\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + b\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{j}^{\,eext}}{\partial t} - rot\vec{j}^{\,mext} - \sigma^m\vec{j}^{\,eext}, \qquad (11)$$

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - a\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - b\vec{E} = graddiv\vec{E} + \mu\frac{\partial\vec{j}^{\,eext}}{\partial t} + \sigma^m j^{eext} + rotj^{mext}, \quad (12)$$

соответственно. Волновое уравнение можно упростить, избавившись от первой производной поля по времени с помощью замены

$$\vec{E} = \tilde{\vec{E}}\exp(-ac^2t/2). \qquad (13)$$

Кроме того, в уравнении (7) введем замены

$$\vec{j}^{\,eext} = \exp(-ac^2t/2)\tilde{\vec{j}}^{\,eext},$$

$$\vec{j}^{\,mext} = \exp(-ac^2t/2)\tilde{\vec{j}}^{\,mext}, \qquad (14)$$

Вычислив первую и вторую производные поля по времени
и учитывая замены (13) и (14), преобразуем уравнение (7) к виду

$$rotrot\tilde{\vec{E}} + \frac{\partial^2\tilde{\vec{E}}}{c^2\partial t^2} + (b - a^2c^2/4)\tilde{\vec{E}} = -\mu\left(\frac{\partial\tilde{\vec{j}}^{\,eext}}{\partial t} - \frac{ac^2}{2}\tilde{\vec{j}}^{\,eext}\right) - rot\tilde{\vec{j}}^{\,mext} - \sigma^m\tilde{\vec{j}}^{\,eext}. \qquad (15)$$

Для получения интегрального представления напряженности нестационарного электрического поля, удовлетворяющего волновому уравнению (15), мы применим методику из книги [1] и будем использовать векторный аналог теоремы Грина. Пусть V замкнутая область пространства, ограниченная регулярной (удовлетворяющей условиям Ляпунова) поверхностью S, $\vec{Q}$ и $\vec{P}$ векторные функции точки, непрерывные в области V и на поверхности S вместе со своими первыми и вторыми производными. Тогда, как показано в [1], имеет место векторный аналог теоремы Грина

$$\int\limits_V (\vec{Q}rotrot\vec{P} - \vec{P}rotrot\vec{Q})dv = \int\limits_S \left([\vec{P}rot\vec{Q}] - [\vec{Q}rot\vec{P}]\right)\vec{n}ds, \qquad (16)$$

где $\vec{n}$ - внешняя нормаль к поверхности S. Положим в (16)

$$\vec{Q} = \varphi\vec{\alpha} \text{ и } \vec{P} = \vec{E}, \qquad (17)$$

где $\vec{\alpha}$ постоянный единичный вектор произвольного направления, а функция φ будет выбрана ниже.

С использованием формул векторного анализа получим (16) в виде

$$\int\limits_V \left[\varphi rotrot\vec{E} + \vec{E}\Delta\varphi + grad\varphi div\vec{E}\right]dv - \int\limits_S (\vec{n}\cdot\vec{E})grad\varphi ds =$$

$$= \int\limits_S ([grad\varphi \times [\vec{E}\times\vec{n}]] - \varphi[rot\vec{E}\times\vec{n}])ds. \qquad (18)$$

Вводя замену

$$\vec{H} = \tilde{\tilde{\vec{H}}}\exp(-ac^2t/2) \qquad (19)$$

и подставляя выражение для $rotrot\tilde{\tilde{\vec{E}}}$ из (15) в (18) с учетом (13) и (14), получим

$$\int\limits_V [-\varphi\mu(\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}}{\partial t} - \frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}) - \varphi\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t^2} - \varphi(b - \frac{a^2c^2}{4})\tilde{\tilde{\vec{E}}} - [\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{mext}\times grad\varphi] -$$

$$-\varphi\sigma^m\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}]dv + \int\limits_V \tilde{\tilde{\vec{E}}}\Delta\varphi dv + \int\limits_V grad\varphi div\tilde{\tilde{\vec{E}}}dv) =$$

$$= \int\limits_S (\vec{n}\cdot\tilde{\tilde{\vec{E}}})grad\varphi ds +$$

$$+ \int\limits_S [grad\varphi\times[\tilde{\tilde{\vec{E}}}\times\vec{n}]]ds - \int\limits_S \varphi[(-\sigma^m\tilde{\tilde{\vec{H}}} - \mu\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{H}}}}{\partial t} + \mu\frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{H}}})\times\vec{n}]ds. \qquad (20)$$

В формуле (20) обозначим объемный и поверхностный интегралы I_V и I_S, соответственно, т.е.,

$$I_V = \int\limits_V [-\varphi\mu(\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}}{\partial t} - \frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}) - \varphi\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t^2} - \varphi(b - \frac{a^2c^2}{4})\tilde{\tilde{\vec{E}}} - [\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{mext}\times grad\varphi] -$$

$$-\varphi\sigma^m\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}]dv + \int\limits_V \tilde{\tilde{\vec{E}}}\Delta\varphi dv + \int\limits_V grad\varphi div\tilde{\tilde{\vec{E}}}dv),$$

$$I_S = \int\limits_S (\vec{n}\cdot\tilde{\tilde{\vec{E}}})grad\varphi ds + \int\limits_S [grad\varphi\times[\tilde{\tilde{\vec{E}}}\times\vec{n}]]ds -$$

$$-\int_S \varphi[(-\sigma^m \tilde{\tilde{\vec{H}}} - \mu \frac{\partial \tilde{\tilde{\vec{H}}}}{\partial t} + \mu a c^2 / 2\tilde{\tilde{\vec{H}}}) \times \vec{n}] ds .$$

Выберем в качестве φ решение скалярного однородного волнового уравнения для непроводящей среды

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

и вычислим сумму $\Sigma_1 = \tilde{\tilde{\vec{E}}}\Delta\varphi - \varphi\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t^2}$. Имеем

$$\Sigma_1 = \frac{1}{c^2}(\tilde{\tilde{\vec{E}}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \varphi\frac{\partial^2\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t^2}).$$

Прямая проверка показывает, что

$$\Sigma_1 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\tilde{\vec{E}}}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varphi\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t}). \quad (21)$$

С учетом равенства (21) получим выражение для объемного интеграла I_V :

$$I_V = (\int_V [-\varphi\mu(\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}}{\partial t} - \frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\tilde{\vec{E}}}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varphi\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t}) - \varphi(b - \frac{a^2c^2}{4})\tilde{\tilde{\vec{E}}} -$$

$$-[\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{mext} \times grad\varphi] - \varphi\sigma^m\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext} + grad\varphi div\tilde{\tilde{\vec{E}}}]dv). \quad (22)$$

Следуя методике [1], положим

$$\varphi = \frac{1}{r}D_0 = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\gamma}\exp(-\frac{(t+t')^2}{2\gamma^2}) = \frac{1}{r}D_0(t+t'), \quad (23)$$

где $r = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$, (x', y', z') - декартовы координаты точки наблюдения, (x, y, z) - декартовы координаты точки интегрирования в формуле (16), $t' = r/c$, а γ - некоторый постоянный малый параметр, который в дальнейшем будет устремлен к нулю.

Мы рассматриваем непрерывные функции, для которых

$$\int_{t=-\infty}^{\infty}\int_V dv dt = \int_V \int_{t=-\infty}^{\infty} dt dv \quad (24)$$

и

$$\lim_{\gamma\to 0}\int_V\int_{t=-\infty}^{\infty} dv dt = \int_V \lim_{\gamma\to 0}\int_{t=-\infty}^{\infty} dt dv. \quad (25)$$

При $\gamma \to 0$ функция D_0 превращается в δ-функцию. Нормировка D_0 такова, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_0(t) dt = 1.$$

Для того, чтобы иметь дело с функцией, которая непрерывна со своими производными, пока мы не будем переходить к пределу при $\gamma \to 0$. (В дальнейшем мы проинтегрируем левую и правую части равенства (20) по времени от $t=-\infty$ до $t=\infty$ и перейдем к пределу при $\gamma\to 0$.)

Подставим выражение (23) для φ в объемный интеграл (22)

и проинтегрируем результат по времени от $t=-\infty$ до $t=\infty$. В результате получим

$$\int\limits_{t=-\infty}^{\infty} I_V dt = \int\limits_{t=-\infty}^{\infty}\int\limits_V [-\frac{1}{r}D_0(t+t')\mu(\frac{\partial\tilde{\vec{j}}^{eext}}{\partial t}-\frac{ac^2}{2}\tilde{\vec{j}}^{eext})+$$

$$+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\vec{E}}\frac{\partial(\frac{1}{r}D_0(t+t'))}{\partial t}-\frac{1}{r}D_0(t+t')\frac{\partial\tilde{\vec{E}}}{\partial t})-\frac{1}{r}D_0(t+t')(b-\frac{a^2c^2}{4})\tilde{\vec{E}}-$$

$$-[\tilde{\vec{j}}^{mext}\times\frac{1}{r}(\frac{1}{r}D_0-\frac{\partial D_0}{\partial r})\vec{r}_0]-\frac{1}{r}D_0(t+t')\sigma^m\tilde{\vec{j}}^{eext}+$$

$$+\frac{1}{r}(\frac{1}{r}D_0-\frac{\partial D_0}{\partial r})\vec{r}_0 div\tilde{\vec{E}}]dvdt, \qquad (26)$$

где $\vec{r}_0$ - это единичный вектор, направленный от точки интегрирования $(x,\, y,\, z)$ к точке наблюдения $(x',\, y',\, z')$

В силу (24) можно поменять порядок интегрирования в (26). Поскольку, в соответствии с (23), $\varphi=\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=0$ при $t=-\infty$ и $t=\infty$, мы имеем

$$\int\limits_{t=-\infty}^{\infty}\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\vec{E}}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\varphi\frac{\partial\tilde{\vec{E}}}{\partial t})dt=\frac{1}{c^2}(\tilde{\vec{E}}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\varphi\frac{\partial\tilde{\vec{E}}}{\partial t})\Big|_{-\infty}^{\infty}=0\ . \qquad (27)$$

В (26) перейдем к пределу при $\gamma\to 0$ и учтем (27):

$$\lim_{\gamma\to 0}\int\limits_{t=-\infty}^{\infty} I_V dt = \int\limits_{t=-\infty}^{\infty}\int\limits_V [-\frac{1}{r}\lim_{\gamma\to 0}D_0(t+t')\mu(\frac{\partial\tilde{\vec{j}}^{eext}}{\partial t}-\frac{ac^2}{2}\tilde{\vec{j}}^{eext})-$$

$$-\frac{1}{r}\lim_{\gamma\to 0}D_0(t+t')(b-\frac{a^2c^2}{4})\tilde{\vec{E}}-[\tilde{\vec{j}}^{mext}\times\frac{1}{r}(\frac{1}{r}\lim_{\gamma\to 0}D_0-\frac{1}{c}\frac{\partial\lim\limits_{\gamma\to 0}D_0(t+r/c)}{\partial(t+r/c)})\vec{r}_0]-$$

$$-\frac{1}{r}\lim_{\gamma\to 0}D_0(t+t')\sigma^m\tilde{\vec{j}}^{eext}+\frac{1}{r}(\frac{1}{r}\lim_{\gamma\to 0}D_0-\frac{1}{c}\frac{\partial\lim\limits_{\gamma\to 0}D_0(t+r/c)}{\partial(t+r/c)})\vec{r}_0 div\tilde{\vec{E}}]dvdt. \qquad (28)$$

Так как

$$\lim_{\gamma\to 0}D_0(t+r/c)=\delta(t+r/c),$$

то с учетом свойств δ -функции мы получаем из (28)

$$\lim_{\gamma\to 0}\int_{t=-\infty}^{\infty} I_V dt = \int_V [-\frac{1}{r}\mu(\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}}{\partial t}|_{t=-r/c} - \frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}|_{t=-r/c}) -$$

$$-\frac{1}{r}(b-\frac{a^2c^2}{4})\tilde{\tilde{\vec{E}}}|_{t=-r/c} - \frac{1}{r}[\frac{1}{r}\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{mext}|_{t=-r/c} + \frac{1}{c}\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{mext}}{\partial t}|_{t=-r/c}]\times\vec{r}_0 - \frac{1}{r}\sigma^m\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}|_{t=-r/c} +$$

$$+\frac{1}{r}(\frac{1}{r}div\tilde{\tilde{\vec{E}}}|_{t=-r/c} + \frac{1}{c}\frac{\partial div\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t}|_{t=-r/c})\vec{r}_0]dvdt. \tag{29}$$

Теперь рассмотрим поверхностный интеграл в (20) с учетом замен (13), (14) и (19):

$$I_S = \int_S ((\vec{n}\cdot\tilde{\tilde{\vec{E}}})grad\varphi + [grad\varphi\times[\tilde{\tilde{\vec{E}}}\times\vec{n}]] - \varphi[(-\sigma^m\tilde{\tilde{\vec{H}}} - \mu(\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{H}}}}{\partial t} - \frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{H}}})\times\vec{n}])ds.$$

Функция φ имеет особенность в точке $r=0$. Следуя методике [1], окружим эту точку сферой S_1 малого радиуса r_1 с центром в точке наблюдения (x', y', z'), исключив тем самым эту точку из области V. Имеем

$$I_V = I_{S_1} + I_{S_2} \tag{30}$$

где S_2 - это внешняя поверхность, ограничивающая объем V,

$$I_{S_1} = \int_{S_1}((\vec{n}\cdot\tilde{\tilde{\vec{E}}})grad\varphi + [grad\varphi\times[\tilde{\tilde{\vec{E}}}\times\vec{n}]] -$$

$$-\varphi[(-\sigma^m\tilde{\tilde{\vec{H}}} - \mu\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{H}}}}{\partial t} + \mu\frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{H}}})\times\vec{n}])ds,$$

$$I_{S_2} = \int_{S_2}((\vec{n}\cdot\tilde{\tilde{\vec{E}}})grad\varphi + [grad\varphi\times[\tilde{\tilde{\vec{E}}}\times\vec{n}]] -$$

$$-\varphi[(-\sigma^m\tilde{\tilde{\vec{H}}} - \mu\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{H}}}}{\partial t} + \mu\frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{H}}})\times\vec{n}])ds. \tag{31}$$

Рассмотрим первый из поверхностных интегралов и вычислим сумму двух первых слагаемых подынтегрального выражения. Напомним, что $\vec{n}$ - это внешняя нормаль к поверхности, ограничивающей объем V, а единичный вектор $\vec{r}/r = \vec{r}_0$ направлен к точке наблюдения (x', y', z'). На поверхности S_1 имеем $\vec{n} = \vec{r}_0$. Представив выражение для $grad\varphi$ в виде

$$grad\varphi = (\frac{1}{r^2}D_0 - \frac{1}{cr}\frac{\partial D_0(t+r/c)}{\partial(t+r/c)})\vec{r}_0,$$

имеем

$$(\vec{n}\cdot\tilde{\tilde{\vec{E}}})grad\varphi+[grad\varphi\times[\tilde{\tilde{\vec{E}}}\times\vec{n}]]=(\vec{n}\cdot\tilde{\tilde{\vec{E}}})(\frac{1}{r^2}D_0-\frac{1}{cr}\frac{\partial D_0(t+r/c)}{\partial(t+r/c)})\vec{r}_0+$$

$$+[(\frac{1}{r^2}D_0-\frac{1}{cr}\frac{\partial D_0(t+r/c)}{\partial(t+r/c)})\vec{r}_0\times[\tilde{\tilde{\vec{E}}}\times\vec{n}]]=$$

$$=(\frac{1}{r^2}D_0-\frac{1}{cr}\frac{\partial D_0(t+r/c)}{\partial(t+r/c)})((\vec{n}\cdot\tilde{\tilde{\vec{E}}})\vec{n}+[\vec{n}\times[\tilde{\tilde{\vec{E}}}\times\vec{n}]]).$$

Так как

$$(\vec{n}\cdot\tilde{\tilde{\vec{E}}})\vec{n}+[\vec{n}\times[\tilde{\tilde{\vec{E}}}\times\vec{n}]]=\tilde{\tilde{\vec{E}}},$$

то

$$(\vec{n}\cdot\vec{E})grad\varphi+[grad\varphi\times[\vec{E}\times\vec{n}]]=\vec{E}(\frac{1}{r^2}D_0-\frac{1}{cr}\frac{\partial D_0(t+r/c)}{\partial(t+r/c)})$$

и, следовательно,

$$I_{S_1}=\int\limits_{S_1}(\tilde{\tilde{\vec{E}}}(\frac{1}{r^2}D_0-\frac{1}{cr}\frac{\partial D_0(t+r/c)}{\partial(t+r/c)})+\frac{1}{r}D_0\sigma^m[\tilde{\tilde{\vec{H}}}\times\vec{n}]+$$

$$+\frac{1}{r}D_0\mu[(\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{H}}}}{\partial t}-\frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{H}}})\times\vec{n}])ds. \tag{32}$$

Теперь проинтегрируем выражение (32) от $t=-\infty$ до $t=\infty$ и перейдем к пределу при $\gamma\to 0$, учитывая свойства рассматриваемых функций (24) и (25) и свойства δ-функции:

$$\lim_{\gamma\to 0}\int\limits_{t=-\infty}^{\infty}I_{S_1}dt=\int\limits_{S_1}\int\limits_{t=-\infty}^{\infty}\lim_{\gamma\to 0}\tilde{\tilde{\vec{E}}}(\frac{1}{r^2}D_0-\frac{1}{cr}\frac{\partial D_0(t+r/c)}{\partial(t+r/c)})-\frac{1}{r}D_0\sigma^m[\vec{n}\times\tilde{\tilde{\vec{H}}}]-$$

$$-\frac{1}{r}D_0\mu[\vec{n}\times(\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{H}}}}{\partial t}-\frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{H}}})])dtds=\int\limits_{S_1}(\frac{1}{r^2}\tilde{\tilde{\vec{E}}}\,|_{t=-r/c}+\frac{1}{cr}\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t}\,|_{t=-r/c}-$$

$$-\frac{1}{r}\sigma^m[\vec{n}\times\tilde{\tilde{\vec{H}}}\,|_{t=-r/c}]-\frac{1}{r}\mu[\vec{n}\times(\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{H}}}}{\partial t}\,|_{t=-r/c}-\frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{H}}}\,|_{t=-r/c})])ds.$$

Далее, устремляя радиус маленькой сферы S_1 к нулю, $r_1\to 0$, получим

$$\lim_{r_1\to 0}\lim_{\gamma\to 0}\int\limits_{t=-\infty}^{\infty}I_{S_1}dt=4\pi\tilde{\tilde{\vec{E}}}\,|_{t=0}. \tag{33}$$

Рассмотрим интеграл по внешней поверхности I_{S_2}, выраженный соотношением (31):

$$I_{S_2}=\int\limits_{S_2}((\vec{n}\cdot\tilde{\tilde{\vec{E}}})(-\frac{1}{r^2}D_0+\frac{1}{cr}\frac{\partial D_0(t+r/c)}{\partial(t+r/c)})\vec{r}_0+[(-\frac{1}{r^2}D_0+\frac{1}{cr}\frac{\partial D_0(t+r/c)}{\partial(t+r/c)})\vec{r}_0\times[\tilde{\tilde{\vec{E}}}\times\vec{n}]]-$$

$$-\frac{1}{r}D_0\sigma^m[\vec{n}\times\tilde{\tilde{\vec{H}}}]-\frac{1}{r}D_0\mu[\vec{n}\times(\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{H}}}}{\partial t}-\frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{H}}})])ds. \qquad (34)$$

На поверхности S_2 вектор $\vec{r}_0$ направлен к точке наблюдения, т.е., внутрь S_2.

Далее проинтегрируем выражение (34) от $t=-\infty$ до $t=\infty$ и перейдем к пределу при $\gamma\to 0$, учитывая свойства рассматриваемых функций (24) и (25) и свойства δ-функции:

$$\lim_{\gamma\to 0}\int_{t=-\infty}^{\infty}I_{S_2}\,dt=\int_{S_2}\int_{t=-\infty}^{\infty}\lim_{\gamma\to 0}((\vec{n}\cdot\tilde{\tilde{\vec{E}}})(\frac{1}{r^2}D_0-\frac{1}{cr}\frac{\partial D_0(t+r/c)}{\partial(t+r/c)})\vec{r}_0+$$

$$+[(\frac{1}{r^2}D_0-\frac{1}{cr}\frac{\partial D_0(t+r/c)}{\partial(t+r/c)})\vec{r}_0\times[\tilde{\tilde{\vec{E}}}\times\vec{n}]]-\frac{1}{r}D_0\sigma^m[\vec{n}\times\tilde{\tilde{\vec{H}}}]-\frac{1}{r}D_0\mu[\vec{n}\times(\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{H}}}}{\partial t}-\frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{H}}})])dtds=$$

$$=\int_{S_2}((\frac{1}{r^2}(\vec{n}\cdot\tilde{\tilde{\vec{E}}}|_{t=-r/c})+\frac{1}{cr}(\vec{n}\cdot\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t}|_{t=-r/c}))\vec{r}_0+[\vec{r}_0\times(\frac{1}{r^2}[\tilde{\tilde{\vec{E}}}|_{t=-r/c}\times\vec{n}]]+\frac{1}{cr}[\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t}|_{t=-r/c}\times\vec{n}])-$$

$$-\frac{1}{r}\sigma^m[\vec{n}\times\tilde{\tilde{\vec{H}}}|_{t=-r/c}]-\frac{1}{r}\mu[\vec{n}\times(\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{H}}}}{\partial t}|_{t=-r/c}-\frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{H}}}|_{t=-r/c})])ds. \qquad (35)$$

Используя равенство

$$\lim_{\gamma\to 0}\lim_{r_1\to 0}\int_{t=-\infty}^{\infty}I_V\,dt=\lim_{\gamma\to 0}\lim_{r_1\to 0}\int_{t=-\infty}^{\infty}I_{S_1}\,dt+\lim_{\gamma\to 0}\int_{t=-\infty}^{\infty}I_{S_2}\,dt$$

и соотношения (20), (29), (30), (33) и (35), получим

$$4\pi\tilde{\tilde{\vec{E}}}|_{t=0}=\int_V[-\frac{1}{r}\mu(\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}}{\partial t}|_{t=-r/c}-\frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}|_{t=-r/c})-$$

$$-\frac{1}{r}(b-\frac{a^2c^2}{4})\tilde{\tilde{\vec{E}}}|_{t=-r/c}-[\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{mext}|_{t=-r/c}\frac{1}{r^2}+\frac{1}{rc}\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{mext}}{\partial t}|_{t=-r/c}]\times\vec{r}_0-$$

$$-\frac{1}{r}\sigma^m\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}|_{t=-r/c}++\frac{1}{r}(\frac{1}{r}div\tilde{\tilde{\vec{E}}}|_{t=-r/c}+\frac{1}{c}\frac{\partial div\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t}|_{t=-r/c})\vec{r}_0]dvdt-$$

$$-\int_{S_2}((\frac{1}{r^2}(\vec{n}\cdot\tilde{\tilde{\vec{E}}}|_{t=-r/c})+\frac{1}{cr}(\vec{n}\cdot\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t}|_{t=-r/c}))\vec{r}_0+[\vec{r}_0\times(\frac{1}{r^2}[\tilde{\tilde{\vec{E}}}|_{t=-r/c}\times\vec{n}]]+$$

$$+\frac{1}{cr}[\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t}|_{t=-r/c}\times\vec{n}])--\frac{1}{r}\sigma^m[\vec{n}\times\tilde{\tilde{\vec{H}}}|_{t=-r/c}]-$$

$$-\frac{1}{r}\mu[\vec{n}\times(\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{H}}}}{\partial t}|_{t=-r/c}-\frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{H}}}|_{t=-r/c})])ds. \qquad (36)$$

Так как момент наблюдения $t=0$ выбран произвольно, можно переписать (36) в виде

$$4\pi\tilde{\tilde{\vec{E}}}|_{\tau=t}=\int_V[-\frac{1}{r}\mu(\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}}{\partial t}|_{\tau=t-r/c}-\frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}|_{\tau=t-r/c})-$$

$$-\frac{1}{r}(b-\frac{a^2c^2}{4})\tilde{\tilde{\vec{E}}}|_{\tau=t-r/c}-[\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{mext}|_{\tau=t-r/c}\frac{1}{r^2}+\frac{1}{rc}\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{mext}}{\partial t}|_{\tau=t-r/c}]\times\vec{r}_0-$$

$$-\frac{1}{r}\sigma^m\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}|_{\tau=t-r/c}+\frac{1}{r}(\frac{1}{r}div\tilde{\tilde{\vec{E}}}|_{\tau=t-r/c}+\frac{1}{c}\frac{\partial div\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t}|_{\tau=t-r/c})\vec{r}_0]dvdt-$$

$$-\int_{S_2}((\frac{1}{r^2}(\vec{n}\cdot\tilde{\tilde{\vec{E}}}|_{\tau=t-r/c})+\frac{1}{cr}(\vec{n}\cdot\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t}|_{\tau=t-r/c}))\vec{r}_0+[\vec{r}_0\times(\frac{1}{r^2}[\tilde{\tilde{\vec{E}}}|_{\tau=t-r/c}\times\vec{n}]]+$$

$$+\frac{1}{cr}[\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t}|_{\tau=t-r/c}\times\vec{n}])-\frac{1}{r}\sigma^m[\vec{n}\times\tilde{\tilde{\vec{H}}}|_{\tau=t-r/c}]-\frac{1}{r}\mu[\vec{n}\times(\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{H}}}}{\partial t}|_{\tau=t-r/c}-$$

$$-\frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{H}}}|_{\tau=t-r/c})])ds. \qquad (37)$$

Формулу (37) можно получить и формально. Для этого нужно везде сделать замену $t\to\tau$ и в формуле (23) положить $t'=r/c-t$.

Применив принцип двойственности [3] к (37), получаем интегральное представление для вектора напряженности нестационарного магнитного поля

$$4\pi\tilde{\tilde{\vec{H}}}|_{\tau=t}=\int_V[-\frac{1}{r}\varepsilon(\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{mext}}{\partial t}|_{\tau=t-r/c}-\frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{mext}|_{\tau=t-r/c})-$$

$$-\frac{1}{r}(b-\frac{a^2c^2}{4})\tilde{\tilde{\vec{H}}}|_{\tau=t-r/c}+[\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}|_{\tau=t-r/c}\frac{1}{r^2}+\frac{1}{rc}\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{eext}}{\partial t}|_{\tau=t-r/c}]\times\vec{r}_0-$$

$$-\frac{1}{r}\sigma^e\tilde{\tilde{\vec{j}}}^{mext}|_{\tau=t-r/c}+\frac{1}{r}(\frac{1}{r}div\tilde{\tilde{\vec{H}}}|_{\tau=t-r/c}+\frac{1}{c}\frac{\partial div\tilde{\tilde{\vec{H}}}}{\partial t}|_{\tau=t-r/c})\vec{r}_0]dvdt-$$

$$-\int_{S_2}((\frac{1}{r^2}(\vec{n}\cdot\tilde{\tilde{\vec{H}}}|_{\tau=t-r/c})+\frac{1}{cr}(\vec{n}\cdot\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{H}}}}{\partial t}|_{\tau=t-r/c}))\vec{r}_0+$$

$$+[\vec{r}_0\times(\frac{1}{r^2}[\tilde{\tilde{\vec{H}}}|_{\tau=t-r/c}\times\vec{n}]]+\frac{1}{cr}[\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{H}}}}{\partial t}|_{\tau=t-r/c}\times\vec{n}])-$$

$$+\frac{1}{r}\sigma^e[\vec{n}\times\tilde{\tilde{\vec{E}}}|_{\tau=t-r/c}]+\frac{1}{r}\varepsilon[\vec{n}\times(\frac{\partial\tilde{\tilde{\vec{E}}}}{\partial t}|_{\tau=t-r/c}-\frac{ac^2}{2}\tilde{\tilde{\vec{E}}}|_{\tau=t-r/c})])ds. \qquad (38)$$

Более подробный вывод окончательных формул представлен в работе [12].

В случае, когда все функции зависят от времени как $\exp(-i\omega t)$ и $\sigma^e=\sigma^m=0$, формулы (37) и (38) переходят в интегральные представления [1, раздел 8.14, с. 410, формулы (19), (20)] известные как формулы Стрэттона-Чу.

Таким образом, получены интегральные представления для векторов напряженностей нестационарных электрического и магнитного полей в однородной изотропной проводящей среде. В соответствии с полученными соотношениями, поле в любой момент времени в произвольной точке внутри некоторого объема выражается через интеграл по поверхности, ограничивающей данный объем, и интеграл по объему. Подынтегральные функции содержат значения напряженностей полей, сторонних токов и зарядов, а также производных этих величин по времени в моменты, предшествующие моменту наблюдения.

Литература

1. *Стрэттон Дж. А.* Теория электромагнетизма. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.
2. Вычислительные методы в электродинамике /Под ред. Р. Митры. М.: Мир, 1977.
3. *Марков Г. Т., Чаплин А. Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. М: Радио и связь, 1983.
4. *Дмитриев В. И., Захаров Е. В.* Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. М.: Издательство Московского университета, 1987.
5. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.
6. *Васильев Е. Н.* Возбуждение тел вращения. М.: Радио и связь, 1987.
7. *Ильинский А. С., Слепян Г. Я.* Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. М.: Издательство Московского университета, 1983.
8. Transient Electromagnetic Fields / Ed. by L. B. Felsen (Topics in Applied Physics, V. 10). New York: Springer-Verlag, 1977.
9. *Васильев Е. Н., Ефимова, И.Г.* Токи на идеально проводящем теле вращения при нестационарной дифракции // Известия вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. №1. С.87-95.
10. *Кравцов В. В.* Интегральные уравнения в задачах дифракции // Вычислительные методы и программированию. Сб. работ Вычислительного центра МГУ. 1966. Вып. 5. С. 260-293.
11. *Ефимова И. Г.* Единственность решения временного интегрального уравнения нестационарной задачи дифракции // Радиотехника и электроника. 2008. Т. 53. №12. С. 1486-1488.
12. *Ильинский А.С., Ефимова И.Г.* Теорема эквивалентности для векторов напряженностей нестационарного электромагнитного поля в проводящей среде // Радиотехника и электроника. 2011. Т.56. №2. С. 143-151.