ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЛП-ПОИСКА

И.Н. Статников, Г.И. Фирсов
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, г.Москва

Статников И.Н.
Фирсов Г.И.
Институт машиноведения РАН

Как известно [1], ПЛП-поиск – это метод рационального проектирования объектов искусственной природы, принадлежащий «семейству методов Монте-Карло» и сконструированный на основе Планирования ЛП $_\tau$ - последовательностей [2]. Метод используется для анализа математических моделей функционирования проектируемых объектов. Очевидно, что в первую очередь качество результатов проектирования при использовании ПЛП-поиска определяется степенью адекватности математической модели реальному процессу действия объекта, но этот вопрос в данной работе не рассматривается. Использование ПЛП-поиска при анализе математических моделей наряду со многими его свойствами предусматривает возможность «свёртывания» получаемой численной информации путём построения аппроксимирующих регрессионных зависимостей разного вида [3]. Напомним, что в ПЛП-поиске основным конструкционным элементом для проведения вычислительных экспериментов являются матрицы планируемых экспериментов, параметрами которых являются N_0 – общее число ВЭ, равное числу строк матрицы планируемых экспериментов, и J – число варьируемых параметров $\alpha_j(j=\overline{1,J})$, равное числу столбцов матрицы планируемых экспериментов. При этом важнейшими параметрами построения матрицы планируемых экспериментов и статистической обработки результатов вычислительных экспериментов также являются: M_j – количество уровней (сечений), на которые разбивается каждый варьируемый параметр α_j (разработаны два варианта построения матрицы планируемых экспериментов: M_j = const (планирование с фиксированным числом уровней) и M_j = var (разноуровневое планирование)); H – число значений критерия в i – ом сечении j – го варьируемого параметра (объём выборки), если M_j = const и $H = H_{ij}$, если M_j = var. В свою очередь, для каждого из указанных вариантов матриц планируемых экспериментов предусмотрены и такие случаи [4-6]:

$$\alpha_j \in (\alpha_{j*}, \alpha_{j**}); \alpha_j \in [\alpha_{j*}, \alpha_{j**}];$$
$$\alpha_j \in (\alpha_{j*}+\varepsilon_j, \alpha_{j**}-\varepsilon_j); \alpha_j \in (\alpha_{j*}-\varepsilon_j, \alpha_{j**}+\varepsilon_j),$$

где α_{j*} и α_{j**} – соответственно нижняя и верхняя границы интервала варьирования j – го параметра, а $0<\varepsilon_j<<1$.

Рассмотрим уравнение линейной регрессии в ПЛП-поиске

$$\hat{y}(\overline{\Theta},\overline{\alpha}) = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1\alpha_1 + \ldots + \hat{\theta}_m\alpha_m . \quad (1)$$

Здесь $\overline{\Theta}$ – вектор коэффициентов уравнения (1), а угольнички над буквами означают, что в уравнении реально стоят оценки величин коэффициентов $\hat{\theta}_j$, а не их истинные значения. Вывод формул оценок коэффициентов уравнения (1) подробно описан в [1]. Реальные возможности уравнения (1) в смысле достигаемой точности проверялись на тестовых линейных функциях $f_{\text{т.},k}(\overline{\alpha})$ без «шума» и с ним, где в качестве шума использовалась «добавка» равномерно распределённых по вероятности псевдослучайных чисел в интервале $(-\beta, \beta)$ с заранее вычисляемой дисперсией этих чисел $D = (2\beta)^2/12 = \beta^2/3$. Точность аппроксимации проверялась по сумме двух критериев: среднеквадратичному отклонению $s_1(\overline{\alpha})$ между функциями $f_{\text{т.}}(\overline{\alpha})$ и $\hat{y}(\overline{\Theta},\overline{\alpha})$ и среднему значению модуля отклонений между этими функциями $s_2(\overline{\alpha})$, т.е., сумма S равнялась:

$$S = c_1 s_1(\overline{\alpha}) + c_2 s_2(\overline{\alpha}), \quad (2)$$

где c_1 и c_2 – веса значимости выбранных критериев точности. В предположении, что $c_1 + c_2 = 1$, и что эти критерии равноценны (сугубо индивидуальное допущение), формула (2) принимает простой вид:

$S = 0.5(s_1(\overline{\alpha}) + s_2(\overline{\alpha}))$.

В ходе экспериментальных исследований подтвердилась роль параметра œ, введенного в [1] как критерия, минимизирующего или сводящего к нулю количество одинаковых строк в матрице планируемых экспериментов, если выполняются следующие неравенства:

$$2/M^{J-1} \le œ \le 10^{-J} \text{ при } M_j = \text{const} \qquad (3)$$

и

$$2/(M^*)^{J-1} \le œ \le 10^{-J} \text{ при } M_j = \text{var}, \qquad (4)$$

где $M^* = J \Big/ \sum_{j=1}^{J} 1/M_j$ – среднее гармоническое количеств уровней варьируемых параметров.

По поводу использованных тестовых функций скажем лишь то, что в них подбирались различные сочетания коэффициентов (положительные и отрицательные, рациональные и иррациональные, разнопорядковые), а в двух экспериментах выбранные коэффициенты обеспечили отрицательные значения средней величины выборки, что представило возможность уточнить свойства алгоритма построения вектора $\overline{\Theta}$ в уравнении (1). Результаты расчётов подтверждают роль параметра œ и при решении задачи аппроксимации экспериментальных данных уравнением линейной регрессии: чем ближе значения этого параметра к левой границе неравенств (3) и (4) при соблюдении самого левого граничного условия, тем выше точность аппроксимации. Кроме того, результаты показывают, что для большинства исследовавшихся функций критерии S_k достигают лучших значений при разноуровневом планировании, чем при $Mj = const$ при приблизительно одинаковых величинах œ. Этот факт объясняется неодинаковым (вероятностным) влиянием варьируемых параметров на величины S_k. Поэтому, при исследовании математических моделей с дальнейшим прицелом на построение регрессионных зависимостей, возможна существенная экономия ВЭ при следующей тактике: сначала с помощью ПЛП-поиска проводится небольшой вычислительный эксперимент (несколько сотен вычислительных экспериментов), затем устанавливается и ранжируется степень вероятностного влияния на те или иные критерии, а после назначается вектор количеств уровней варьируемых параметров $\overline{M} = (M_1, ..., M_J)$, что позволит при общем (суммарном [1]) числе ВЭ, более меньшем, чем если бы проводить вычислительный эксперимент «вслепую», достигнуть желаемой точности аппроксимации.

Очень важна, сама по себе, и точность значений составляющих вектора $\overline{\Theta}$, особенно, при наличии на входах аппроксимируемой функции шумов. Для ответа на этот вопрос проводились следующие вычислительные эксперименты. При построении матрицы планируемых экспериментов для каждой функции к значениям варьируемых параметров α_j добавлялись шумы β_j, равномерно распределённые по вероятности в интервале $(-\beta_j, \beta_j)$ при условии, что $|\beta_j| << 1$, т.е, элементы строки $\alpha_{s,j}$ в матрице планируемых экспериментов равнялись $\alpha_{s,j}$ = $\alpha_j + \beta_j$. Далее, считали отношение *otn* среднеквадратичных отклонений матриц $\{\alpha_{ij}\}$ и $\{\beta_{ij}\}$: $otn = \sigma(\beta)/\sigma(\alpha)$.

Резюмируя изложенный материал, полагаем что формулы линейной аппроксимации [1] результатов вычислительных экспериментов, полученных на математических моделях, при соблюдении описанных рекомендаций обеспечивают наперёд заданную точность, если установлен сам факт линейной зависимости конструктивных параметров от предъявляемых критериев. Это позволяет во многих случаях перейти от сложных дифференциальных зависимостей к простым (например, алгебраическим) и использовать последние как предварительные при проектирования объекта, а иногда, и как окончательные.

Литература

1. *Статников И.Н., Андреенков Е.В.* ПЛП-поиск – эвристический метод решения задач математического программирования. – М.: ИИЦ МГУДТ, 2006г. – 140 с.
2. *Соболь И.М.* Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. – М.: Наука, 1969 г. – 288 с.
3. *Статников И.Н., Фирсов Г.И.* Использование ПЛП-поиска в задачах обработки результатов вычислительного эксперимента // Информационно-вычислительные технологии в решении фундаментальных проблем и прикладных научных задач. Сессия ИВТН-2004. Сборник материалов. - М.: NC Group / НВК "Вист", 2004. - С.51.
4. *Статников И.Н., Фирсов Г.И.* О дополнительных возможностях в алгоритмах ПЛП-поиска при проведении вычислительных экспериментов // Информационно-вычислительные технологии в решении фундаментальных проблем и прикладных научных задач. Сессия ИВТН-2007. Сборник материалов. - М.: NC Group / НВК "Вист", 2007. - С.17.
5. *Статников И.Н., Фирсов Г.И.* О некоторых инструментальных возможностях ПЛП-поиска // Информационно-вычислительные технологии в решении фундаментальных проблем и прикладных научных задач. Сессия ИВТН-2009. Сборник материалов. - М.: НВК "Вист", 2009. - С.19.
6. *Статников И.Н., Фирсов Г.И.* Инструментальные возможности ПЛП-поиска // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2011. – Т. 18, вып.5. – С. 808.